فصل اول

«مقدمات و پیش‌نیازها»

آزمون فصل اول

۱ـ کدام یک از اعمال زیر روی مجموعه‌ی تعریف شده، عمل دوتایی است؟

۱) عمل جمع روی مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج
۲) عمل جمع روی مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد
۳) عمل ضرب روی مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی
۴) عمل تفریق روی مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی

۲ـ عمل $a*b = ۲^{ab}$ روی کدام یک از مجموعه‌های زیر عمل دوتایی نیست؟

۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی
۲) مجموعه اعداد صحیح
۳) مجموعه اعداد گویا
۴) مجموعه اعداد حقیقی

۳ـ تعداد عمل‌های دوتایی جابجایی روی یک مجموعه‌ی ۴ عضوی برابر است با:

۱) $۲^{۱۰}$
۲) $۲^{۳}$
۳) $۴^{۱۶}$
۴) $۴^{۱۰}$

۴ـ فرض کنید $*$ عمل تفاضل متقارن بین دو مجموعه‌ی A و B باشد، یعنی $A*B = A\Delta B$. در این صورت:

۱) عمل $*$ هم جابجایی است هم شرکت‌پذیر
۲) عمل $*$ جابجایی است ولی شرکت‌پذیر نیست.
۳) عمل $*$ جابجایی نیست ولی شرکت‌پذیر است.
۴) عمل $*$ نه جابجایی است نه شرکت‌پذیر.

۵ـ در جایگاه‌های ۱ و ۲ از جدول زیر، به ترتیب چه عضوهایی قرار بگیرند تا عمل $*$ دوتایی باشد و جدول مفروض یک مربع لاتین؟

*	a	b	c	d
a	a	$\boxed{۱}$	$\boxed{۲}$	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	$\boxed{۱}$
d	d	$\boxed{۲}$	b	a

۱) a و c
۲) b و c
۳) c و a
۴) c و b

فصل دوم

گروه‌ها»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال۱: جدول کیلی دو گروه $(\mathbb{Z}_۴,+)$ و $(U_۴,.)$ را رسم کنید.

پاسخ: $\mathbb{Z}_۴ = \{۰,۱,۲,۳\}$ و $U_۴ = \{۱,۳\}$، بنابراین داریم:

+	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۰	۲	۳	۰
۲	۲	۳	۴	۱
۳	۳	۰	۱	۲

.	۱	۳
۱	۱	۳
۳	۳	۱

همان‌طور که می‌بینیم در هر جدول، درایه‌ها نسبت به قطر اصلی متقارن هستند، پس هر دو گروه آبلی می‌باشند، از طرفی در همه‌ی سطرها و ستون‌های آن‌ها، هر عضو فقط یکبار دیده می‌شود، پس هر دو جدول، مربع لاتین هستند.

مثال۲: کدام یک از مجموعه‌های زیر تحت عمل ضرب به پیمانه‌ی ۲۵ تشکیل گروه می‌دهد؟

۱) $\{۱,۱۵,۲۰\}$ ۲) $\{۱,۲,۷\}$ ۳) $\{۱,۳,۱۰,۱۲\}$ ۴) $\{۱,۷,۱۸,۲۴\}$

پاسخ: گزینه «۴» اولاً مجموعه‌ای تحت عمل ضرب به پیمانه‌ی ۲۵ تشکیل گروه می‌دهد که اعضایش نسبت به۲۵ اول باشند، پس گزینه‌های (۱) و (۳) نمی‌توانند جواب مسئله باشند، چون۱۵، ۲۰، ۱۰ نسبت به ۲۵ اول نیستند. در گزینه«۲» می‌بینیم که $۲.۷ = ۱۴ \overset{۲۵}{\equiv} ۱۴$ اما ۱۴ در مجموعه $\{۱,۲,۷\}$ قرار ندارد یعنی این مجموعه نسبت به عمل ضرب به پیمانه‌ی ۲۵ بسته نیست. تنها گزینه‌ای که باقی می‌ماند گزینه‌ی «۴» است. همه‌ی اعضای این مجموعه نسبت به ۲۵ اولند، هم‌چنین می‌بینیم $۷.۷ = ۴۹ \overset{۲۵}{\equiv} ۲۴$، $۱۸.۱۸ = ۳۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} ۲۴$، $۲۴.۲۴ = ۵۷۶ \overset{۲۵}{\equiv} ۱$، $۷.۱۸ = ۱۲۶ \overset{۲۵}{\equiv} ۱$، $۷.۲۴ = ۱۶۸ \overset{۲۵}{\equiv} ۱۸$، $۱۸.۲۴ = ۴۳۲ \overset{۲۵}{\equiv} ۷$، یعنی حاصل‌ضرب همه‌ی اعضای این مجموعه در این مجموعه قرار می‌گیرند، بنابراین گزینه‌ی ۴ درست می‌باشد.

اکنون در مثال زیر، گروه مهمی را معرفی می‌کنیم که به گروه **چهارتایی کلاین** معروف می‌باشد.

مثال۳: فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد و $a \in G$. اگر $o(a^۵) = ۶$، آن‌گاه $o(a)$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۳۰ ۳) ۵ ۴) ۶ یا ۳۰

پاسخ: گزینه «۴» اگر $o(a) = n$، آن‌گاه داریم $o(a^۵) = \frac{n}{(۵,n)} = ۶$. چون۵ عددی اول است،$(n,۵) = ۱$ یا $(n,۵) = ۵$. اگر $(n,۵) = ۱$، آن‌گاه $o(a^۵) = \frac{n}{۱} = ۶$ پس $n = ۶$. اگر $(n,۵) = ۵$، آن‌گاه $o(a^۵) = \frac{n}{۵} = ۶$ در نتیجه $o(a) = n = ۳۰$.

آزمون فصل دوم

۱ـ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با عمل داده شده گروه نیست؟

۱) مجموعه‌ی $G=\{a^k, k\in\mathbb{Z}, a\in\mathbb{R}-\{0\}\}$ با عمل ضرب معمولی

۲) مجموعه‌ی $G=\{a\in\mathbb{R}, -1<a<1\}$ با عمل $a,b\in G; a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

۳) مجموعه‌ی $G=\{(a,b); a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}-\{0\}\}$ با عمل $(a,b)*(c,d)=(ad+bc,bd)$

۴) مجموعه‌ی توانی یک مجموعه‌ی دلخواه با عمل اجتماع

۲ـ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تحت عمل ضرب ماتریس گروه نیست؟

۱) $G=\{A\in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A=-1\}$

۲) $G=\left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x\in\mathbb{Q}-\{0\}\right\}$

۳) $G=\left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \middle| 0\neq x\in\mathbb{R}\right\}$

۴) $G=\left\{\begin{bmatrix} x & 2x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$

۳ـ فرض کنید G یک گروه باشد و $a,b\in G$، در این صورت کدام گزینه درست نیست؟

۱) G آبلی است اگر و تنها اگر $(ab)^2=a^2b^2$

۲) G آبلی است اگر و تنها اگر $a=a^{-1}$

۳) G آبلی است اگر و تنها اگر $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

۴) G آبلی است اگر و تنها اگر به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$، $(ab)^n=a^nb^n$

۴ـ اگر G یک گروه باشد و $a\in G$ به طوری که $o(a)=n$ ، آن‌گاه به ازای عدد صحیح m داریم:

۱) $o(a^m)=\dfrac{n}{[m,n]}$　۲) $o(a^m)=\dfrac{n}{(m,n)}$　۳) $o(a^m)=(m,n)$　۴) $o(a^m)=[m,n]$

۵ـ اگر به ازای عضو دلخواه a از گروه G داشته باشیم $o(a^3)=25$، آن‌گاه:

۱) $o(a)=25$　۲) $o(a)=1$ یا ۳　۳) $o(a)=25$ یا ۷۵　۴) $o(a)=25$ یا ۳

۶ـ فرض کنید a و b دو عضو دلخواه گروه G باشند، در این صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $o(ab)=o(ba)$　۲) $o(aba^{-1})=o(bab^{-1})$　۳) $o(aba^{-1}b^{-1})=o(ab)$　۴) $o(ab)=o(a)o(b)$

۷ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اگر G گروهی متناهی باشد، آن‌گاه ممکن است عضوی از مرتبه‌ی نامتناهی داشته باشد.

۲) گروه متناهی G نمی‌تواند عضوی از مرتبه‌ی نامتناهی داشته باشد.

۳) همه‌ی اعضای گروه نامتناهی G از مرتبه‌ی نامتناهی هستند.

۴) ضرب هر دو عضو نامتناهی گروه G، عضوی نامتناهی است.

۸ـ فرض کنید G یک گروه آبلی باشد و $a,b\in G$. در این صورت:

۱) $o(ab)=o(a)o(b)$

۲) $[o(a),o(b)]=1 \Leftrightarrow o(ab)=o(a)o(b)$

۳) $o(ab)\neq o(a)o(b)$

۴) $(o(a),o(b))=1 \Leftrightarrow o(ab)=o(a)o(b)$

۹ـ اگر G یک گروه باشد و $a,b\in G$ به طوری که $a^{-1}ba=b^{-1}$ و $b^{-1}ab=a^{-1}$، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a^2=b^{-2}$　۲) $a^4=e$　۳) $a^3=b^3$　۴) $b^4=e$

۱۰ـ فرض کنید G یک گروه باشد و $a,b\in G$. اگر $a^4=e$، آن‌گاه $o(ba^{10}b^{-1})$ برابر است با:

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۸　۴) ۱۰

فصل سوم

«گروه‌های جایگشتی»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال ۱: فرض کنید $\varphi=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵\\۴&۳&۵&۲&۱\end{pmatrix}$ یک جایگشت در S_5 باشد و معکوس آن را بیابید.

پاسخ: طبق تعریف بالا داریم $\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}۴&۳&۵&۲&۱\\۱&۲&۳&۴&۵\end{pmatrix}$ یا به عبارت دیگر با مرتب کردن دامنه آن $\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵\\۵&۴&۲&۱&۳\end{pmatrix}$.

مثال ۲: جدول کیلی گروه S_3 را رسم کنید.

پاسخ: همان‌طور که در مثال قبل نشان دادیم گروه S_3 برابر است با $\{e, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}$. بنابراین جدول کیلی آن به صورت زیر می‌باشد:

	e	α	β	β^2	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
e	e	α	β	β^2	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
α	α	e	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	β	β^2
β	β	$\alpha\beta^2$	β^2	e	α	$\alpha\beta$
β^2	β^2	$\alpha\beta$	e	β	$\alpha\beta^2$	α
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β^2	$\alpha\beta^2$	α	e	β
$\alpha\beta^2$	$\alpha\beta^2$	β	α	$\alpha\beta$	β^2	e

ناآبلی بودن S_3 را به راحتی می‌توان در جدول فوق مشاهده کرد، زیرا درایه‌ها نسبت به قطر اصلی متقارن نیستند. از طرفی چون هر درایه در هر سطر و ستون، فقط یک بار دیده می‌شود، جدول فوق یک مربع لاتین می‌باشد.

مثال ۳: تعداد دورهای متمایز از هم و به طول ۲ در S_3 را بیابید.

پاسخ: دورهای متمایز از هم به طول ۲ در S_3 به صورت (۱۲)، (۱۳) و (۲۳) می‌باشند، پس تعداد این دورها برابر است با۳. اما با استفاده از قضیه‌ی فوق و بدون نوشتن تمام دورها می‌توانیم تعداد دورها را بیابیم، یعنی $۳=\frac{۱}{۲}\frac{۳!}{(۳-۲)!}$.

مثال ۴: مرتبه‌ی جایگشت $\varphi=(۱۲۳۸)(۴۵۶)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۴» قرار می‌دهیم $\alpha=(۱۲۳۸)$ و $\beta=(۴۵۶)$. می‌بینیم که α و β دو دور مجزا هستند، زیرا عناصر مجزایی را حرکت می‌دهند، از طرفی $o(\alpha)=۴$ و $o(\beta)=۳$، بنابراین $o(\alpha\beta)=[o(\alpha),o(\beta)]=[۳,۴]=۱۲$.

مثال ۵: تعداد جایگشت‌های به طول ۲ در S_4 برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۳» طبق قضیه‌ی فوق، تعداد دورهای به طول ۲ در S_4 برابر است با $۶=\frac{۱}{۲}\frac{۴!}{(۴-۲)!}$، اما S_4 جایگشت‌های دیگری هم از مرتبه‌ی ۲ دارد که به صورت ضرب دو دور از هم جدا از مرتبه‌ی ۲ می‌باشند، یعنی به فرم $(a\,b)(c\,d)$. این اعضا عبارتند از (۲۳)(۱۴)، (۲۴)(۱۳) و (۳۴) (۱۲). در نتیجه S_4، ۹ عضو از مرتبه‌ی ۲ دارد.

مثال ۶: مرتبه‌ی جایگشت $\varphi=(۱۲۵۶)(۱۳۴۶۸)(۳۷)$ برابر است با:

۱) ۶۰ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان طور که می‌بینیم (۱۲۵۶)، (۱۳۴۶۸) و (۳۷) مجزا نیستند، چون دورهای (۱۲۵۶) و (۱۳۴۶۸) اعداد ۶ و دورهای (۱۳۴۶۸) و (۳۷) عدد ۳ را حرکت می‌دهند. پس ابتدا باید φ را به صورت حاصل ضرب دورهای مجزا بنویسیم، لذا داریم:

$$\varphi=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷&۸\\ ۲&۵&۳&۴&۶&۱&۷&۸\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷&۸\\ ۳&۲&۴&۶&۵&۸&۷&۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷&۸\\ ۱&۲&۷&۴&۵&۶&۳&۸\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷&۸\\ ۲&۵&۴&۶&۸&۷&۳&۱\end{pmatrix}$$
$$=(۱۲۵۸)(۳۴۶۷)$$

اکنون قرار می‌دهیم $\alpha=(۱۲۵۸)$ و $\beta=(۳۴۶۷)$، بنابراین $o(\alpha)=۴$ و $o(\beta)=۴$، در نتیجه $o(\varphi)=[o(\alpha),o(\beta)]=[۴,۴]=۴$.

مثال ۷: اگر $\theta=(۱۲۴)(۳۴۵)$ یک جایگشت در $S_۵$ باشد، آن‌گاه:

۱) $\theta^{۲۴}=(۱۲۵۳۴)$ ۲) $\theta^{۲۴}=(۴۳۵۲۱)$ ۳) $\theta^{۲۴}=(۱۲۳۴۵)$ ۴) $\theta^{۲۴}=(۱۴۳۲۵)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا θ را به حاصل ضرب دورهای مجزا تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$\theta=(۱۲۴)(۳۴۵)=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵\\ ۲&۴&۳&۱&۵\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵\\ ۱&۲&۴&۵&۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴&۵\\ ۲&۵&۴&۱&۳\end{pmatrix}=(۱۲۵۳۴)$$

پس θ دوری به طول ۵ می‌باشد، بنابراین $\theta^{۵}=e$ یا به عبارت دیگر $\theta^{۴}=\theta^{-۱}$، در نتیجه داریم:

$$\theta^{۲۴}=\theta^{۲۰}\cdot\theta^{۴}=(\theta^{۵})^{۴}\cdot\theta^{۴}=e\cdot\theta^{۴}=e\cdot\theta^{-۱}=(۴۳۵۲۱)$$

مثال ۸: جایگشت (۱ ۲) یک جایگشت فرد است و (۱ ۳ ۲) یک جایگشت زوج، زیرا می‌توان آن را به صورت $(۱۳)(۳۲)=(۱۳۲)$ که حاصل ضرب تعداد زوجی ترانهش است، نوشت.

مثال ۹: جایگشت $\alpha=(۱۶۸)(۳۴)$ در $S_۸$ با کدام‌یک از جایگشت‌های زیر مزدوج است؟

۱) (۱۲۴۵۶۷) ۲) (۲۵۷)(۲۳) ۳) (۳۴۵)(۱۲) ۴) (۱۶)(۳۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق قضیه‌ی قبل، جایگشت α با جایگشتی مزدوج است که دارای ساختار دوری یکسانی با α باشد. جایگشت α در حقیقت به صورت $\alpha=(۱۶۸)(۳۴)(۷)(۵)(۲)$ می‌باشد، پس ساختار دوری آن به شکل $۱^{۳}\,۲\,۳$ می‌باشد. در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی «۳» دارای ساختار دوری به شکل $۱^{۳}\,۲\,۳$ است.

مثال ۱۰: تعداد جایگشت‌های مزدوج با جایگشت $(۱۳)(۲۴۶)$ در $S_۶$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق قضیه‌ی فوق، جایگشت β مزدوج جایگشت $(۱۳)(۲۴۶)$ خواهد بود، هرگاه ساختار دوری یکسانی با این جایگشت داشته باشد، یعنی β حاصل‌ضرب دو دور مجزا یکی به طول ۲ و دیگری به طول ۳ باشد، به شکل $\beta=(a_۱\ a_۲)(b_۱\ b_۲\ b_۳)$. حال تعداد این جایگشت‌ها را پیدا می‌کنیم. تعداد دورهای به طول ۲ در $S_۶$ برابر است با $\binom{۶}{۲}(۲-۱)!=۱۵$. وقتی یک دور دوتایی $(a_۱\ a_۲)$ را انتخاب کردیم، چون $(a_۱\ a_۲)$ و $(b_۱\ b_۲\ b_۳)$ از هم مجزا هستند، از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ تنها ۴ عدد برای تعیین دور $(b_۱\ b_۲\ b_۳)$ باقی می‌ماند، بنابراین از این ۴ عضو به تعداد $\binom{۴}{۳}=۴$ می‌توانیم ۳ عضو را انتخاب کنیم، اما این سه عضو انتخاب شده می‌توانند دو جایگشت متمایز به صورت $(b_۱\ b_۲\ b_۳)$ و $(b_۱\ b_۳\ b_۲)$ را ایجاد کنند، بنابراین تعداد کل جایگشت‌های مزدوج با جایگشت $(۱۳)(۲۴۶)$ برابر است با $۱۲۰=۲\times\binom{۴}{۳}\binom{۶}{۲}$.

مثال ۱۱: جدول کیلی گروه D_8 را رسم کنید.

☑ **پاسخ:** همان‌طور که در بالا اشاره شد، گروه D_8 به صورت $\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\alpha\beta,\alpha^2\beta,\alpha^3\beta\}$ است به طوری که $\alpha^4=\beta^2=e$ و $\beta\alpha\beta^{-1}=\alpha^{-1}$. بنابراین جدول کیلی آن به صورت زیر خواهد بود:

	e	α	α^2	α^3	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha^3\beta$
e	e	α	α^2	α^3	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha^3\beta$
α	α	α^2	α^3	e	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha^3\beta$	β
α^2	α^2	α^3	e	α	$\alpha^2\beta$	$\alpha^3\beta$	β	$\alpha\beta$
α^3	α^3	e	α	α^2	$\alpha^3\beta$	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
β	β	$\alpha^3\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	e	α^3	α^2	α
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	$\alpha^3\beta$	$\alpha^2\beta$	α	e	α^3	α^2
$\alpha^2\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	β	$\alpha^3\beta$	α^2	α	e	α^3
$\alpha^3\beta$	$\alpha^3\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	β	α^3	α^2	α	e

مثال ۱۲: گروه D_{80} چند عضو از مرتبه‌ی ۲ دارد؟

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۱ ۴) ۴۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عناصر مرتبه‌ی ۲ در D_{80} به صورت $\alpha^k\beta\ (0\le k\le 40)$ و α^{20} می‌باشند. در نتیجه تعداد این عناصر ۴۱ می‌باشد.

آزمون فصل سوم

۱ـ مرتبه‌ی جایگشت $\varphi = (۱۳۵۴)(۲۳۶)(۲۵۶)$ در $S_۶$ برابر است با:

۱) ۳	۲) ۴	۳) ۶	۴) ۱۲

۲ـ اگر α و β در دور در S_n باشند، آن‌گاه کدام گزینه‌ی زیر درست است؟

۱) اگر α و β دو دور مجز باشند، آن‌گاه $\alpha\beta = \beta\alpha$

۲) همواره داریم $\alpha\beta = \beta\alpha$

۳) $o(\alpha\beta) = o(\alpha)o(\beta)$

۴) اگر $o(\alpha) = n$، آن‌گاه $k \in \mathbb{Z}; o(\alpha^k) = n$

۳ـ کدام‌یک از جایگشت‌های زیر مزدوج جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۵ & ۶ & ۴ & ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ است؟

۱) (۱۲۳۴)	۲) $(۱۲)(۲۳۴۵)$	۳) $(۲۳)(۴۵۶۷)$	۴) $(۱۲۳)(۴۵۶)$

۴ـ تعداد جایگشت‌های مرتبه‌ی ۴ در $S_۶$ برابر است با:

۱) ۷۰	۲) ۸۰	۳) ۹۰	۴) ۱۰۰

۵ـ فرض کنید $\alpha = (۲۵۴)$ و $\beta = (۱۲۳)(۳۵۶)$ دو جایگشت در $S_۶$ باشند، در این صورت $\alpha\beta\alpha^{-1}$ برابر است با:

۱) (۱۲۵۶۳)	۲) (۱۲۵)	۳) (۱۵۴۶۳)	۴) $(۱۵۶۳)(۲۴)$

۶ـ اگر $\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$، آن‌گاه $\alpha^{۲۵}$ برابر است با:

۱) α	۲) (۱۳۴)	۳) (۲۵)	۴) (۱)

۷ـ اگر گروه متقارن S_n دارای عضوی از مرتبه‌ی ۱۲ باشد، آن‌گاه حداقل مقدار n برابر است با:

۱) ۹	۲) ۱۰	۳) ۱۱	۴) ۱۲

۸ـ گروه $S_۴$ چند کلاس تزویج دارد؟

۱) ۴	۲) ۵	۳) !۴	۴) !۵

۹ـ اگر $\alpha = (۲۳۶۷)(۱۴۸۵۲)$، آن‌گاه α^{-1} برابر است با:

۱) $(۲۵۸۴۱)(۷۶۳۲)$	۲) $(۷۶۳۲)(۲۵۸۴۱)$	۳) (۷۶۳۲۵۸۴۱)	۴) (۱۴۸۵۲۳۶۷)

۱۰ـ تعداد عناصر مرتبه‌ی ۲ در گروه دووجهی $D_۸$ برابر است با:

۱) ۲	۲) ۳	۳) ۴	۴) ۵

فصل چهارم

«زیرگروه‌ها»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: فرض کنید $G=\mathbb{Q}-\{0\}$ و $H=\{3^n 8^m \mid n,m\in\mathbb{Z}\}$. در این صورت نشان دهید H زیرگروهی از G است.

☑ **پاسخ:** به ازای دو عضو a و b از H اعداد $m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ موجودند به طوری که $a=3^{n_1}8^{m_1}$ و $b=3^{n_2}8^{m_2}$، داریم:

$$a^{-1}b=(3^{n_1}8^{m_1})^{-1}3^{n_2}8^{m_2}=3^{n_2-n_1}8^{m_2-m_1}\xrightarrow{n_2-n_1,\,m_2-m_1\in\mathbb{Z}} a^{-1}b=3^{n_2-n_1}8^{m_2-m_1}\in H\Rightarrow H\leq G$$

مثال۲: فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ عددی دلخواه باشد. مجموعه‌ی ریشه‌های n ام واحد یعنی $H=\{z\in\mathbb{C}^* \mid z^n=1\}$ نسبت به عمل ضرب زیر گروهی از $\mathbb{C}^*$ است.

☑ **پاسخ:** فرض می‌کنیم $z,u\in\mathbb{C}^*$، در این صورت $z^n=u^n=1$. چون $z^n=1$ داریم $z^{-n}=1$، بنابراین:

$$(z^{-1}u)^n=z^{-n}u^n=1\Rightarrow z^{-1}u\in G\Rightarrow G\leq\mathbb{C}^*$$

به ازای عدد طبیعی n، عدد z را **ریشه‌ی n ام مختلط واحد** می‌نامیم، هرگاه $z^n=1$.

مثال۳: فرض کنید G یک گروه دوری از مرتبه‌ی ۱۲۰ باشد. در این صورت تعداد مولدهای G برابر است با:

۱) ۳		۲) ۴		۳) ۱۲		۴) ۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق نتیجه فوق، تعداد مولدهای G برابر است با $\varphi(120)$ و چون $120=2^3\times3\times5$، داریم $\varphi(120)=(2-1)2^2\times(3-1)3^0\times(5-1)5^0=32$.

مثال۴: تعداد زیرگروه‌های گروه دوری از مرتبه‌ی p^n (p عدد اول) برابر است با:

۱) p^{n-1}		۲) p^{n+1}		۳) $n-1$		۴) $n+1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تعداد زیرگروه‌های گروه دوری از مرتبه‌ی p^n برابر است با تعداد مقسوم‌علیه‌های p^n یعنی $n+1$.

مثال ۵: اگر a عضو دلخواهی از گروه G باشد و $H=\langle a^{12}\rangle\cap\langle a^{18}\rangle$، آن‌گاه H برابر است با:

۱) $\langle a^6\rangle$		۲) $\langle a^{36}\rangle$		۳) $\langle a^2\rangle$		۴) $\langle a^3\rangle$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق قضیه‌ی قبل داریم $H=\langle a^{[12,18]}\rangle=\langle a^{36}\rangle$.

مثال۶: زیرگروه تولید شده توسط $\left\langle \frac{2}{5},\frac{7}{8}\right\rangle$ برابر است با:

۱) $\left\langle \frac{14}{40}\right\rangle$		۲) $\langle 1\rangle$		۳) $\left\langle \frac{1}{40}\right\rangle$		۴) $\langle 14\rangle$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این زیرگروه برابر است با $\left\langle \frac{d}{40}\right\rangle$ که در آن $d=(2\times8\,,\,7\times5)=(16,35)=1$. پس $\left\langle \frac{2}{5},\frac{7}{8}\right\rangle=\left\langle \frac{1}{40}\right\rangle$ توجه داشته باشید که در این مثال، n_iها را ۱ درنظر گرفتیم.

مثال۷: زیرگروه تولید شده توسط زیرمجموعه‌ی $\left\langle \frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{1}{4}\right\rangle$ برابر است با:

۱) $\left\langle \frac{1}{20}\right\rangle$ ۲) $\left\langle \frac{9}{80}\right\rangle$ ۳) $\left\langle \frac{9}{20}\right\rangle$ ۴) $\left\langle 20\right\rangle$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» این زیرگروه برابر است با $\left\langle \frac{1}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right\rangle=\left\langle \frac{(1\times 5\times 4,3\times 4\times 4,3\times 4\times 5)}{4\times 5\times 4}\right\rangle=\left\langle \frac{(20,48,60)}{80}\right\rangle=\left\langle \frac{4}{80}\right\rangle=\left\langle \frac{1}{20}\right\rangle$.

مثال ۸: هم دسته‌های چپ $H=4\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** با توجه به این که $H=\{\dots,-8,-4,0,4,8,\dots\}$، هم دسته‌های چپ آن در $\mathbb{Z}$ برابر است با:

$H=\{\dots,-8,-4,0,4,8,\dots\}$ و $H+1=\{\dots,-7,-3,1,5,9,\dots\}$ و $H+2=\{\dots,-6,-2,2,6,10,\dots\}$ و $H+3=\{\dots,-5,-1,3,7,11,\dots\}$

مثال۹: اگر H و K دو زیرگروه G باشند به طوری که $[G:H]=m$، $[G:K]=n$ و $(m,n)=1$، در این صورت داریم:

۱) $G\neq HK$ ۲) $G=HK$ ۳) $HK\not\leq G$ ۴) HK گروهی دوری است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در مثال قبل ثابت کردیم همواره رابطه‌ی $[G:H\cap K]\leq[G:H][G:K]=mn$ برقرار است، بنابراین $m=[G:H]\,|\,[G:H\cap K]$ و $n=[G:K]\,|\,[G:H\cap K]$. چون $(m,n)=1$، نتیجه می‌گیریم $mn\,|\,[G:H\cap K]$، پس $mn\leq[G:H\cap K]$. در نتیجه $[G:H\cap K]=mn$. از این رو داریم:

$$\frac{o(G)}{o(H\cap K)}=\frac{o(G)}{o(H)}.\frac{o(G)}{o(K)}\Rightarrow o(G)=\frac{o(H)o(K)}{o(H\cap K)}=o(HK)\xrightarrow{HK\leq G}G=HK$$

مثال۱۰: یک مزدوج برای (12) در گروه S_3 بیابید.

☑ **پاسخ:** به ازای عضو (123) داریم $(13)=(132)(12)(123)=(123)^{-1}(12)(123)$، پس (13) یک مزدوج (12) خواهد بود.

مثال۱۱: گروه $Q_8=\{\pm i,\pm j,\pm k,\pm 1\}$ و زیرگروه $H=\{\pm i\}$ از آن را در نظر بگیرید و گروه خارج قسمتی $\frac{Q_8}{H}$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** قبلاً نشان دادیم $H\trianglelefteq Q_8$. پس گروه خارجی قسمتی Q_8 بر H قابل تعریف است و داریم $\frac{Q_8}{H}=\{H,Hj,Hk,H1\}$.

مثال۱۲: همان طور که می‌دانید $Z(D_8)=\{e,\alpha^2\}\trianglelefteq D_8$، گروه خارج قسمتی $\frac{D_8}{Z(D_8)}$ را بیابید.

☑ **پاسخ:**

$$\frac{D_8}{Z(D_8)}=\{Z(D_8),\alpha Z(D_8),\alpha\beta Z(D_8),\alpha^2\beta Z(D_8)\}=\{\{e,\alpha^2\},\{\alpha,\alpha^3\},\{\alpha\beta,\alpha^3\beta\},\{\alpha^2\beta,\beta\}\}$$

مثال۱۳: فرض کنید $H\trianglelefteq G$ و $e\neq a\in G$. اگر $o(aH)=5$ و $o(H)=4$، آن‌گاه $o(a)$ چه عددی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این که $(aH)^5=a^5H$ داریم:

$$o(aH)=5\Rightarrow(aH)^5=H\Rightarrow a^5H=H\Rightarrow a^5\in H\xrightarrow{o(H)=4}(a^5)^4=e\Rightarrow a^{20}=e\Rightarrow o(a)\,|\,20\Rightarrow o(a)=1,2,4,5,10,20$$

مثال۱۴: فرض کنید G گروهی از مرتبه‌ی 50 باشد و $N\trianglelefteq G$ و $x\in G$. اگر $o(N)=25$ و $o(x)=5$، آن‌گاه:

۱) $x\notin N$ ۲) $x^2\notin N$ ۳) $x\in N$ ۴) $x^2\in N$ ولی $x\notin N$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» داریم $[G:N]=\frac{50}{25}=2$، بنابراین $(o(N),o(\frac{G}{N}))=(25,2)=1$ و شرایط مسئله در شرایط نتیجه فوق صدق می‌کند، در نتیجه $x\in N$، پس گزینه‌های «۱» و «۴» نادرست و گزینه‌ی «۳» درست می‌باشد. گزینه‌ی «۲» هم نادرست است، زیرا می‌بینیم که:

$$o(xN)\,|\,o(\frac{G}{N})=2\Rightarrow(xN)^2=N\Rightarrow x^2N=N\Rightarrow x^2\in N$$

آزمون فصل چهارم

۱ـ اگر H و K دو زیرگروه از گروه متناهی G باشند به طوری که $H \subseteq K$ یا $K \subseteq K$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $H \cup K$ زیرگروه G است.
۲) G گروهی غیردوری از مرتبه‌ی عددی اول است.
۳) HK زیرگروهی از G است.
۴) G گروهی از مرتبه‌ی توانی از یک عدد اول است.

۲ـ گروه A_4 از چه مرتبه‌ای زیرگروه ندارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۳ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) به ازای $Z(S_n)=\{e\}, n \geq 3$
۲) $Z(V_4)=\{e\}$
۳) $Z(D_{2n})=\{e\}$
۴) $Z(Q_8)=Q_8$

۴ـ فرض کنید $G=<x>$ گروهی دوری از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت $<x^k> \subseteq <x^m>$ اگر:

۱) $(m,n)|(k,n)$
۲) $m|n$
۳) $(k,n)|(m,n)$
۴) $n|m$

۵ـ کدام‌یک از گروه‌های زیر دوری است؟

۱) $(\mathbb{Z}_n,+)$
۲) $(\mathbb{Q},+)$
۳) $(\mathbb{R},+)$
۴) $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$

۶ـ اگر $G=<ab^{-1},bc>$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $<a,cb>$
۲) $<ab^{-1},c>$
۳) $<ab^{-1},ca>$
۴) $<ba,cb>$

۷ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $S_n=<(123),(124),\ldots,(12n)>$
۲) $A_n=<\alpha^2 \mid \alpha \in S_n>$
۳) $S_n=<(1ij) \mid i \neq j, 2<i,j<n>$
۴) $A_n=<(12),(12\ldots n)>$

۸ـ گروه S_3 چند زیرگروه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۹ـ گروه D_8 چند زیرگروه سره دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰ـ فرض کنید G گروهی دوری از مرتبه‌ی p^n باشد (p عدد اول). دراین صورت تعداد مولدها و تعداد زیرگروه‌های G به ترتیب برابراست با:

۱) $(p-1)p^{n+1}$ و p^{n+1}
۲) $(p-1)p^{n-1}$ و $n+1$
۳) $n-1$ و p^{n+1}
۴) $n-1$ و $n+1$

۱۱ـ اگر G یک گروه دوری متناهی ازمرتبه‌ی عدد اول p باشد، آن‌گاه معادله‌ی $x^q=1$ به ازای عدد اول q چند جواب دارد؟

۱) p ۲) ۱ ۳) pq ۴) q

۱۲ـ اگر G یک گروه دوری باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

۱) اگر G یک زیرگروه متناهی داشته باشد، آن‌گاه G متناهی است.
۲) اگر G نامتناهی باشد، آن‌گاه e تنها عضو G از مرتبه‌ی متناهی است.
۳) اگر $a \in G$ از مرتبه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه G متناهی است.
۴) اگر تعداد زیرگروه‌های G متناهی باشد، آن‌گاه G لزوماً متناهی نیست.

۱۳ـ فرض کنید H زیرگروه محضی از گروه G باشد، در این صورت زیرگروه تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{g \in G \mid g \notin H\}$ کدام است؟

۱) $G-H$ ۲) H ۳) G ۴) $\frac{G}{H}$

۱۴ـ فرض کنید H و K دو زیرگروه G با شاخص‌های متناهی باشند، در این صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $[H:H\bigcap K]=[G:K]$
۲) $[G:H\bigcap K]=[G:H][G:K]$
۳) $[G:H\bigcap K]=[G:H][H:H\bigcap K]$
۴) $[G:H\bigcap K]\leq[G:H]$

۱۵ـ اگر H و K دو زیرگروه از گروه متناهی G باشند و $o(H)>\sqrt{o(G)}$ و $o(K)>\sqrt{o(G)}$، آن‌گاه:

۱) $H\bigcap K=\{e\}$
۲) $HK=KH$
۳) $H\bigcap K\neq\{e\}$
۴) $HK\leq G$

۱۶ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر G گروهی دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است.
۲) هر زیرگروه یک گروه دوری، دوری است.
۳) هر زیرگروه یک گروه آبلی در آن نرمال است.
۴) اگر G گروهی آبلی باشد، آن‌گاه دوری است.

۱۷ـ اگر G یک گروه باشد و $N_G^H=\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\}$ و $H_G=\bigcap\limits_{g\in G}g^{-1}Hg$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) N_G^H بزرگترین زیرگروه G است که H در آن نرمال است.
۲) N_G^H کوچکترین زیرگروه G است که H در آن نرمال است.
۳) H_G کوچکترین زیرگروه G مشمول در H است.
۴) H_G کوچکترین زیرگروه G شامل H است.

۱۸ـ فرض کنید G گروهی از مرتبه‌ی ۱۰۰ باشد و $N\trianglelefteq G$ و $x\in G$. اگر $o(N)=25$ و $o(x)=3$، آن‌گاه:

۱) $x\in N$
۲) $x\notin N$
۳) $x^2\in N$ ولی $x\notin N$
۴) $x^2\notin N$

۱۹ـ فرض کنید N زیرگروه نرمالی از G باشد. اگر $\frac{G}{N}$ آبلی باشد، آن‌گاه:

۱) $N\leq G'$
۲) $G'\leq N$
۳) $G'=\{e\}$
۴) $G'=G$

۲۰ـ فرض کنید a تنها عضو مرتبه‌ی n از گروه G باشد، آن‌گاه:

۱) $a\in Z(G)$
۲) $C_G^{\{a\}}\neq G$
۳) $a\notin Z(G)$
۴) $C_G^{\{a\}}=\{a\}$

فصل پنجم

«همریختی گروه‌ها»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: فرض کنید $G=(\mathbb{Z},+)$ و $\varphi:G\to G$ نگاشتی با ضابطه‌ی $\varphi(n)=۲n$ باشد، در این صورت برای هر $m,n\in\mathbb{Z}$ داریم $\varphi(m+n)=۲(m+n)=۲m+۲n=\varphi(m)+\varphi(n)$، بنابراین φ یک همریختی است.

مثال ۲: فرض کنیم $G=(\mathbb{Z},+)$ و $H=(۳\mathbb{Z},+)$ تابع $\varphi:G\to H$ با ضابطه‌ی $\varphi(x)=۳x$ یک همریختی است. زیرا:

$$\varphi(x+y)=۳(x+y)=۳x+۳y=\varphi(x)+\varphi(y)$$

مثال ۳: تعداد همریختی‌ها از $\mathbb{Z}_{۲۵}$ به $\mathbb{Z}_{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\mathbb{Z}_{۱۵}=\{\bar{۰},\bar{۱},\dots,\overline{۱۴}\}=\langle x\mid x^{۱۵}=۱\rangle$ و $\mathbb{Z}_{۲۵}=\{\bar{۰},\bar{۱},\dots,\overline{۲۴}\}=\langle y\mid y^{۲۵}=۱\rangle$. اگر فرض کنیم $\varphi:\mathbb{Z}_{۱۵}\to\mathbb{Z}_{۲۵}$ یک همریختی است، آن‌گاه چون عناصر $\mathbb{Z}_{۲۵}$ توان‌هایی از y هستند، می‌توانیم ضابطه‌ی آن را به صورت $\varphi(x)=y^n$ که $۰\le n<۲۵$ تعریف کنیم. طبق قضیه‌ی فوق $o(y^n)=o(\varphi(x))\mid o(x)=۱۵$، پس $y^{۱۵n}=(y^n)^{۱۵}=۱$. از طرفی $o(y)=۲۵$، بنابراین داریم:

$$۲۵\mid ۱۵n\Rightarrow\frac{۲۵}{۵}\Big|\frac{۱۵n}{۵}\Rightarrow ۵\mid ۳n\xrightarrow{(۵,۳)=۱}۵\mid n\xrightarrow{۰\le n<۲۵}n=۰\text{ و }۵\text{ و }۱۰\text{ و }۱۵\text{ و }۲۰$$

در نتیجه ۵ همریختی به فرم $y^۰=e$، $y^۵$، $y^{۱۰}$، $y^{۱۵}$، $y^{۲۰}$ بین $\mathbb{Z}_{۱۵}$ و $\mathbb{Z}_{۲۵}$ وجود دارد. همان‌طور که می‌دانیم عدد ۵ ب.م.م اعداد ۱۵ و ۲۵ است.
در کل می‌توانیم بگوییم به ازای دو عدد صحیح m و n، تعداد همریختی‌های بین $\mathbb{Z}_m$ و $\mathbb{Z}_n$ برابر است با (m,n) یعنی ب.م.م m و n.

مثال ۴: نشان دهید $(\mathbb{Q},+)$ زیرگروه ماکسیمال ندارد.

پاسخ: فرض می‌کنیم M زیرگروه ماکسیمال $\mathbb{Q}$ باشد. چون $\mathbb{Q}$ آبلی است، همه‌ی زیرگروه‌هایش در آن نرمالند، پس $M\trianglelefteq\mathbb{Q}$، بنابراین طبق قضیه‌ی قبل $\frac{\mathbb{Q}}{M}$ از مرتبه‌ی عددی اول است، یعنی به ازای یک عدد اول مثل p، $o(\frac{\mathbb{Q}}{M})=p$، در نتیجه به ازای هر $\frac{a}{b}+M\in\frac{\mathbb{Q}}{M}$ داریم:

$$p(\frac{a}{b}+M)=M\Rightarrow\frac{pa}{b}+M=M\Rightarrow\frac{pa}{b}\in M$$

به خصوص به ازای $\frac{a}{pb}+M\in\frac{\mathbb{Q}}{M}$ داریم:

$$p(\frac{a}{bp}+M)=M\Rightarrow\frac{a}{b}+M=M\Rightarrow\frac{a}{b}\in M\Rightarrow\mathbb{Q}\subseteq M\Rightarrow\mathbb{Q}=M$$

که تناقض می‌باشد، پس $\mathbb{Q}$ نمی تواند زیرگروه ماکسیمال داشته باشد.

آزمون فصل پنجم

۱ـ چند همریختی از یک گروه ۵ عضوی به یک گروه ۲۴ عضوی وجود دارد؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۵ ‏ ۴) ۲۴

۲ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (p عددی اول است)

۱) $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = p-1$ ‏ ۲) $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = p$ ‏ ۳) $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = 2$ ‏ ۴) $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$

۳ـ چند همریختی پوشا از یک گروه ۱۴ عضوی به یک گروه ۵ عضوی وجود دارد؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) وجود ندارد. ‏ ۴) ۵

۴ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $\operatorname{Aut} D_8 \cong D_8$ ‏ ۲) $\operatorname{Inn}(D_8) \cong V_4$ ‏ ۳) $\operatorname{Aut} Q_8 \cong S_3$ ‏ ۴) $\operatorname{Inn}(V_4) \cong \{e\}$

۵ـ فرض کنید G یک گروه از مرتبه‌ی ۲۰ باشد، در این صورت:

۱) G با زیرگروهی از D_{40} یکریخت است. ‏ ۲) G با زیرگروهی از S_{20} یکریخت است.

۳) G با زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{20}$ یکریخت است. ‏ ۴) G با زیرگروهی از $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۶ـ اگر $\varphi: G \to G$ با ضابطه‌ی $\varphi(x) = x^{-1}$ یک همریختی گروه‌ها باشد، آن‌گاه:

۱) G دوری است. ‏ ۲) G ناآبلی است. ‏ ۳) G آبلی است. ‏ ۴) G غیردوری است.

۷ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $(\mathbb{Q},+) \cong (\mathbb{Q}^+,\cdot)$ ‏ ۲) $S_3 \cong \mathbb{Z}_6$ ‏ ۳) $Q_8 \cong D_8$ ‏ ۴) $(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}^+,\cdot)$

۸ـ چند همریختی بین دو گروه دوری از مرتبه‌های ۱۰ و ۱۵ وجود دارد؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۵ ‏ ۴) ۷

۹ـ اگر G گروهی ناآبلی باشد، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\operatorname{Aut} G$ دوری است. ‏ ۲) $\operatorname{Inn}G \ncong Q_8$ ‏ ۳) $\operatorname{Inn}G \ntrianglelefteq \operatorname{Aut} G$ ‏ ۴) $\operatorname{Inn}G$ ناآبلی است.

۱۰ـ کدام گزینه درست است؟

۱) هر زیرگروه مشخصه از گروه G در آن نرمال است. ‏ ۲) هر زیرگروه نرمال از گروه G در آن مشخصه است.

۳) مرکز گروه G زیرگروه مشخصه G نیست. ‏ ۴) رابطه‌ی نرمال بودن در یک گروه تعدی است.

فصل ششم

«حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال ۱: مرتبه‌ی عضو (۳,۵) را در $\mathbb{Z}_۶ \times \mathbb{Z}_{۱۵}$ بیابید.

۱) ۳۰		۲) ۱۵		۳) ۱		۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» داریم:

$$\left.\begin{array}{l} o_{\mathbb{Z}_۶}(۳) = o(۳\times ۱) = \dfrac{o(۱)}{(۳,o(۱))} = \dfrac{۶}{(۳,۶)} = \dfrac{۶}{۳} = ۲ \\ o_{\mathbb{Z}_{۱۵}}(۵) = o(۵\times ۱) = \dfrac{o(۱)}{(۵,o(۱))} = \dfrac{۱۵}{(۵,۱۵)} = \dfrac{۱۵}{۵} = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow o((۲,۵)) = [۲,۳] = ۶$$

مثال ۲: تعداد خودریختی‌های تعریف شده روی $\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳$ برابر است با:

۱) ۹		۲) ۱		۳) ۶		۴) ۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق قضیه‌ی قبل داریم $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳)| = ۳^۴ - ۳^۳ - ۳^۲ + ۳ = ۴۸$.

آزمون فصل ششم

۱ـ اگر G حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های $G_1,...,G_n$ باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) G آبلی است اگر و تنها اگر به ازای هر $1 \le i \le n$، G_iها آبلی باشند.

۲) $Z(G) = Z(G_1)\times ...\times Z(G_n)$

۳) G دوری است اگر و تنها اگر به ازای هر $1 \le i \le n$، G_iها دوری باشند.

۴) $o(G) = o(G)\times ...\times o(G_n)$

۲ـ تعداد خودریختی‌های قابل تعریف روی گره $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ برابراست با:

۱) ۴۸۰　۲) ۵　۳) ۲۵　۴) 5^5

۳ـ اگر $G = \mathbb{Z}_2 \times D_8$، آن‌گاه $Z(G)$ برابر است با:

۱) D_8　۲) $\mathbb{Z}_2$　۳) V_4　۴) $\{e\}$

۴ـ مرتبه‌ی $<(2,3)>$ در گروه $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4$ برابر است با:

۱) ۳۶　۲) ۶　۳) ۴　۴) ۱

۵ـ اندیس زیرگروه $3\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\times 5\mathbb{Z}$ در گروه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ برابر است با:

۱) ۳　۲) ۶　۳) ۱۵　۴) ۳۰

۶ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست می‌باشد؟

۱) اگر به ازای هر $1 \le i \le n$، $H_i \trianglelefteq G_i$، آن‌گاه $\dfrac{G_1\times ...\times G_n}{H_1 \times ...\times H_n} \cong \dfrac{G_1}{H_1}\times .. \times \dfrac{G_n}{G_n}$

۲) اگر H و K دو زیرگروه نرمال G باشند، آن‌گاه $\dfrac{G}{H}\times\dfrac{G}{K} \cong \dfrac{G}{H\cap K}$

۳) اگر $G = HK$ آن‌گاه $\dfrac{G}{H} \cong K$

۴) اگر $G_1 \times G_2 \cong H_1 \times H_2$، آن‌گاه $G_1 \cong G_2$ و $H_1 \cong H_2$

۷ـ گروه $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25}$ با کدام‌یک از گروه‌های زیر یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$　۲) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$　۳) $\mathbb{Z}_{225}$　۴) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

۸ـ اگر H و K دو زیرگروه نرمال G باشند به طوری که $G = HK$ و $[H:H\cap K] = m$ و $[K:H\cap K] = n$، آن‌گاه $[G:H\cap K]$ برابر است با:

۱) $[m,n]$　۲) (m,n)　۳) mn　۴) اگر $m > n$، آن‌گاه m^n

۹ـ کدام‌یک از گروه‌های زیر را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه نابدیهی خودش نوشت:

۱) D_8　۲) $(\mathbb{Q},+)$　۳) S_3　۴) $\mathbb{Z}_6$

۱۰ـ کدام‌یک از گروه‌های زیر آبلی است؟

۱) $V_4 \times Q_8$　۲) $V_4 \times \mathbb{Q}$　۳) $S_3 \times Q_8$　۴) $S_3 \times D_8$

فصل هفتم

«حلقه‌ها»

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال۱: کدام‌یک از حلقه‌های زیر میدان نمی‌باشد.

۱) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ۲) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ۳) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ۴) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر کدام نسبت به عمل ضرب دارای وارون هستند، پس تشکیل یک میدان می‌دهند. اما در گزینه (۴)، مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل ضرب دارای وارون نیست. زیرا $۲\in\mathbb{Z}$ ولی $\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z}$.

مثال۲: فرض کنید R یک حلقه باشد. کدام‌یک از موارد زیر لزوماً جابه‌جایی بودن حلقه R را نتیجه نمی‌دهد؟

۱) به ازای هر $x\in R$، $x^۴=x$

۲) R حلقه‌ای یکدار باشد و به ازای هر $x,y\in R$، $(xy)^۲=x^۲y^۲$

۳) گروه جمعی حلقه R، دوری باشد.

۴) به ازای هر $x,y\in R$، $(xy)^۲=x^۲y^۲$

پاسخ: گزینه «۴» در مطالب گذشته دیدیم هرگاه در یک حلقه به ازای هر $x\in R$ و عدد صحیح مثبت n، $x^n=x$ باشد، آن‌گاه آن حلقه جابه‌جایی است بنابراین گزینه (۱) به ازای $n=۴$ درست است. همچنین نشان دادیم اگر گروه جمعی حلقه R دوری باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای جابه‌جایی است. پس گزینه (۳) نیز صحیح می‌باشد. همچنین در مثالی به طور کامل نشان دادیم اگر R یک حلقه یکدار باشد و $(xy)^۲=x^۲y^۲$، آن‌گاه R جابه‌جایی است. پس گزینه (۲) نیز درست است. اما اگر در این حالت حلقه یکدار نباشد، حلقه جابه‌جایی نمی‌شود. به عنوان مثال، حلقه غیریکدار $R=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ را در نظر بگیرید. به ازای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\in R$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\in R$ داریم:

$$\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow BA\neq AB$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید حلقه R جابه‌جایی نیست. پس گزینه (۴) درست نمی‌باشد.

مثال۳: تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر $(\mathbb{Z}_{۱۸},+,\cdot)$ کدام است.

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه «۲» تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه $(\mathbb{Z}_{۱۸},+,\cdot)$ برابر است با $۱۸-\varphi(۱۸)$. بنابراین با محاسبه $\varphi(۱۸)$ می‌توانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه را به دست آوریم. در نتیجه:

$$\varphi(۱۸)=\varphi(۲\cdot ۳^۲)=۱۸(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})=۶\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر}}n-\varphi(n)=۱۸-۶=۱۲$$

مثال۴: کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) در هر حوزه صحیح قوانین حذف برقرار است.

۲) هر میدان یک حوزه صحیح است.

۳) هر حوزه صحیح متناهی یک میدان است.

۴) هر حوزه صحیح یک میدان است.

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنید R یک حلقه باشد. در این‌صورت در حلقه R قوانین حذف برقرار است اگر و تنها اگر R فاقد مقسوم‌علیه صفر باشد، و هر حلقه‌ای که فاقد مقسوم صفر باشد، یک حوزه صحیح است. پس گزینه (۱) درست می‌باشد. از طرفی طبق قضیه می‌دانیم **هر میدان یک حوزه صحیح** است پس گزینه (۲) نیز درست می‌باشد. همچنین می‌دانیم هر حوزه صحیح **متناهی** یک میدان است، لذا گزینه (۳) نیز درست است. حال حوزه صحیح نامتناهی $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. حوزه صحیح $\mathbb{Z}$ دارای وارون ضربی تمام اعضای غیر صفرش نمی‌باشد. پس $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست. لذا گزینه (۴) نادرست است.

مثال۵: کدام‌یک از حلقه‌های زیر یک میدان است؟

۱) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ۲) $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ ۳) $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ ۴) $(\mathbb{Z}_{17},+,\cdot)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» گزینه (۱) یک حوزه صحیح نامتناهی است اما میدان نیست چون وارون ضربی ندارد. گزینه‌های (۲) و (۳) هر کدام دارای مقسوم علیه صفر نابدیهی هستند. پس حوزه صحیح نیستند و در نتیجه میدان نمی‌باشند. ولی گزینه (۴) میدان می‌باشد. زیرا $n=17$ یک عدد اول است، پس $(\mathbb{Z}_{17},+,\cdot)$ یک میدان می‌شود.

مثال۶: کدام‌یک از حلقه‌های زیر یک حوزه صحیح است؟

۱) $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ ۲) $(\mathbb{Z}_{18},+,\cdot)$ ۳) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ ۴) $(n\mathbb{Z},+,\cdot)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» گزینه‌های (۱) و (۲) دارای مقسوم علیه صفر نابدیهی هستند، پس حوزه صحیح نیستند. گزینه (۴) یکدار نیست لذا نمی‌تواند حوزه صحیح باشد. گزینه (۳) صحیح است. زیرا در حلقه‌هایی به فرم $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ در صورتی که n عدد اول باشد، حلقه یک میدان می‌شود، لذا یک حوزه صحیح خواهد بود.

مثال۷: در کدام‌یک از حلقه‌های زیر قانون حذف برقرار نمی‌باشد؟

۱) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ ۲) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ۳) $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ ۴) $(\mathbb{C},+,\cdot)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) همگی حوزه صحیح هستند، پس قوانین حذف روی آن‌ها صادق است. ولی گزینه (۳) دارای مقسوم علیه صفر نابدیهی است و نمی‌تواند دارای قوانین حذف باشد. زیرا همان‌طور که در قضیه‌ای اثبات کردیم قوانین حذف روی حلقه‌هایی که مقسوم‌علیه صفر نابدیهی ندارند برقرار است. ولی در حلقه $\mathbb{Z}_6$ عناصر۲ و ۳ مقسوم‌علیه صفر هستند. پس $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ دارای مقسوم‌علیه صفر نابدیهی است. لذا قوانین حذف روی این حلقه برقرار نمی‌باشد.

مثال۸: حلقه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ از مشخصه صفر هستند. زیرا همه این حلقه‌ها حوزه صحیح هستند و حلقه $2\mathbb{Z}$ نیز از مشخصه صفر است. زیرا به ازای هر $a\in\mathbb{Z}$ داریم $2na=0$. پس $\mathrm{Char}(2\mathbb{Z})=0$.

مثال۹: کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست نمی‌باشد؟

۱) $\mathrm{Char}(\mathbb{Z})=0$ ۲) $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_{11})=11$

۳) $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_{10})=10$ ۴) برای مجموعه توانی $P(X)$، $\mathrm{Char}(P(X))=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مشخصه یک حوزه صحیح، صفر یا یک عدد اول است. پس $\mathrm{Char}(\mathbb{Z})=0$ و گزینه (۱) درست است. مشخصه حلقه $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ که در آن p عدد اول است برابر است با p. بنابراین $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_{11})=11$ در نتیجه گزینه (۲) نیز درست است. از طرف دیگر مشخصه حلقه $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ برابر با n است، لذا $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_{10})=10$ و این نشان‌دهنده صحیح بودن گزینه (۳) است. اما مشخصه یک مجموعه توانی برابر است با ۲. زیرا به ازای هر $A\subset X$، $2A=A\Delta A=\phi$. پس $\mathrm{Char}(P(X))=2$. لذا گزینه (۴) نادرست است.

مثال۱۰: فرض کنید R یک حلقه باشد. همچنین فرض کنید عدد صحیح زوج n موجود است به طوری که به ازای هر $x\in R$، $x^n=x$. در این صورت:

۱) $x=-x$ ۲) $x=0$ ۳) $x^{n-1}=0$ ۴) $x^n=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنید $x\in R$ و $n=2k$. چون R یک حلقه است، پس $-x\in R$. حال با قرار دادن $-x$ در معادله $x^n=x$ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$-x=(-x)^n=(-x)^{2k}=((-x^2))^k=(x^2)^k=x^{2k}=x^n=x\Rightarrow -x=x$$

✦ **گزاره ۱:** فرض کنید R یک حلقه غیر صفر باشد. اگر به ازای هر $x\in R$، عدد صحیح زوج n موجود باشد به طوری که $x^n=x$، آن‌گاه مشخصه حلقه R، برابر است با ۲.

اثبات: در مثال قبل نشان دادیم اگر R یک حلقه و به ازای هر $x\in R$ عدد صحیح زوج n موجود باشد به طوری که $x^n=x$، آن‌گاه $-x=x$ است. لذا از این‌که $-x=x$ است، نتیجه می‌شود:

$$-x=x\Rightarrow x+x=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow \mathrm{Char}(R)=2$$

مثال۱۱: فرض کنید R حلقه‌ای ناصفر باشد که در آن به ازای هر $x \in R$، $8x = 0$. در این صورت مشخصه حلقه R کدام‌یک از مجموعه جواب‌های زیر است؟

۱) ۸ یا ۲ ۲) ۸ یا ۴ ۳) ۲، ۴ یا ۱ ۴) ۲، ۴ یا ۸

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنید مشخصه حلقه R برابر با n باشد. با توجه به معادله $8x = 0$ و با توجه به گزاره قبل لازم است $n \mid 8$. بنابراین داریم $n = 1$، ۲، ۴ یا ۸. چون R حلقه ناصفر است، پس $n \neq 1$. در نتیجه n برابر است با ۲ ، ۴ یا ۸. بنابراین گزینه (۴) درست است.

مثال۱۲: کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد مشخصه حلقه درست نمی‌باشد؟

۱) مشخصه هر حوزه صحیح متناهی، عددی اول است.
۲) مشخصه هر حوزه صحیح، صفر است یا عددی اول.
۳) مشخصه هر حوزه صحیح نامتناهی، نامتناهی است.
۴) مشخصه حلقه جابه‌جایی بولی برابر است با۲.

پاسخ: گزینه «۳» مشخصه هر حوزه صحیح متناهی، عددی اول است، همانند حلقه $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ که p عددی اول است و مشخصه هر حوزه صحیح صفر یا عددی اول است، همانند حلقه $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) درست هستند. مشخصه حلقه جابه‌جایی بولی برابر با ۲ است. زیرا بـا توجـه به تعریف حلقه بولی، هر عضو x از حلقه به صورت $x^2 = x$ است. همان‌طور که می‌بینیم توان x عددی زوج است. پس با توجه بـه نکـات قبلـی، مشخصـه حلقه بولی برابر با ۲ می‌شود. بنابراین گزینه (۴) نیز درست است. هیچ حلقه‌ای با مشخصهٔ نامتناهی وجود ندارد. مشخصهٔ هر حلقه یا عددی طبیعی است یا صفر است. پس گزینه (۳) نادرست است.

مثال۱۳: تعداد عناصر خودتوان حلقه $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۱۲۸ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته قبل در حلقه $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ که در آن به ازای اعداد اول متمایز $p_1, \dots, p_k$ داریم $n = p_1 p_2 \dots p_k$، تعداد عناصـر خودتوان برابر است با 2^k. پس در حلقه $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$ داریم، $n = 3 \times 7$. بنابراین تعداد عناصر خودتوان برابر است با $4 = 2^2$.

مثال۱۴: فرض کنید R یک حلقه باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) هر عضو خودتوان مخالف صفر، پوچ‌توان است.
۲) اگر R یک حوزه صحیح باشد، آن‌گاه تنها عناصر خودتوان ۰ و ۱ هستند.
۳) اگر R یک حوزه صحیح باشد، آن‌گاه صفر تنها عضو پوچ‌توان است.
۴) اگر R یک حلقه یکدار و x عضو پوچ‌توان R باشد، آن‌گاه x وارون‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مطالب اثبات شده در متن درس می‌دانیم هر عضو خودتوان مخالف صفر، پوچ‌توان نیست. پس گزینه (۱) نادرست است. همچنین می‌دانیم اگر R یک حوزه صحیح باشد، آن‌گاه تنها عناصر خودتوان ۰ و ۱ می‌باشند و صفر تنها عضو پوچ‌توان است، و اگر R یک حلقه یکدار و x عضو پوچ‌توان R باشد، آن‌گاه x وارون‌پذیر نیست. بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) درست هستند.

مثال۱۵: فرض کنید R یک حلقه باشد. حلقه R در تمام موارد زیر لزوماً جابه‌جایی است به غیر از گزینه ....

۱) اگر R یکدار و از مشخصه ۲ باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in R$، $xy^2 = xy$.
۲) اگر به ازای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $(xy)^2 = x^2y^2$.
۳) اگر به ازای $x, y \in R$ داشته باشیم $x^2 = x$.
۴) اگر به ازای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $x^3 = x$.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آنچه در متن درس آموختیم، می‌دانیم اگـر R یـک حلقـه یکـدار و از مشخصـه ۲ باشـد بـه طـوری کـه بـه ازای هـر $x, y \in R$ داشته باشیم $xy^2 = xy$، آن‌گاه R یک حلقه جابه‌جایی است. همچنین به ازای هر $x, y \in R$ اگر عدد صـحیح مثبـت n موجـود باشـد بـه طوری که $x^n = x$، آن‌گاه R یک حلقه جابه‌جایی است. بنابراین در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) حلقه R جابه‌جایی اسـت. امـا اگـر بـه ازای هـر $x, y \in R$ داشته باشیم $(xy)^2 = x^2y^2$ در صورتی R یک حلقه جابه‌جایی است که R یکدار باشد. پس در شرایط گزینه (۲) حلقه R جابه‌جایی نمی‌باشد.

مثال۱۶: فرض کنید R یک حلقه باشد. در این‌صورت کدام‌یک از موارد زیر برقرار نمی‌باشد؟

۱) اگر R حوزه صحیح و $x \in R$ پوچ توان باشد x مقسوم‌علیه صفر R است.

۲) اگر R یک حلقه تقسیم باشد، آن‌گاه R دارای دو عضو خودتوان است.

۳) اگر R یکدار باشد و $x \in R$ پوچ توان باشد آن‌گاه x وارون‌پذیر است.

۴) اگر x عضو خودتوان باشد به طوری که R هیچ عضو پوچ‌توان نداشته باشد، آن‌گاه $x \in Z(R)$.

پاسخ: گزینه «۳» از مطالبی که تا به این‌جا آموختیم می‌دانیم اگر x عضو پوچ‌توان حوزه صحیح R باشد، آن‌گاه x مقسوم‌علیه صفر است. پس گزینه (۱) برقرار است. حال فرض کنید x عضو خودتوان حلقه تقسیم R باشد. لذا داریم $x^2 = x$. پس $x^2 - x = 0$. بنابراین $x(1-x) = 0$. چون R یک حلقه تقسیم است، لذا دارای مقسوم‌علیه صفر نیست. پس یک حوزه صحیح است، لذا $x = 0$ یا $x = 1$. بنابراین **حلقه تقسیم R دارای دو عضو خودتوان است** و این نشان می‌دهد گزینه (۲) درست است. همچنین اگر R حلقه یکدار و $x \in R$ عضو پوچ‌توان باشد، آن‌گاه x وارون‌پذیر نیست، ولی $1-x$ وارون‌پذیر است. بنابراین گزینه (۳) برقرار نمی‌باشد. و در مورد گزینه (۴) نیز آموختیم اگر x عضو خودتوان باشد به طوری که R دارای هیچ عضو پوچ‌توانی نباشد، آن‌گاه $x \in Z(R)$. پس گزینه (۴) نیز برقرار است.

مثال۱۷: فرض کنید R یک حلقه و به ازای هر $x \in R$، $x^{1390} = x$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $Char(R) = 2$

۲) R عضو پوچ‌توان غیرصفر ندارد.

۳) R جابه‌جایی است.

۴) برای هر $x, y \in R$ داریم $x^{1389}y \neq yx^{1389}$.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به گزاره قبل و از این‌که $x^{1390} = x$ است به این نتایج می‌رسیم، $2x = 0 \Rightarrow CharR = 2$، R یک حلقه جابه‌جایی است و حلقه R عضو پوچ‌توان غیرصفر ندارد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند ولی گزینه (۴) نادرست است. زیرا با توجه به این‌که داریم $x^{1390} = x$، با توجه به گزاره قبل به این نتیجه می‌رسیم که $x^{1389}y = yx^{1389}$ است. پس گزینه (۴) نادرست است.

آزمون فصل هفتم

۱ـ فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک دستگاه جامع جبری باشد که تمام اصول حلقه یکدار را داراست بجز اصل:

$$\forall a,b\in R\ ,\ \ a+b=b+a$$

اگر این اصل هم برقرار باشد، آن‌گاه R یک ....

۱) حلقه تقسیم است. ۲) حلقه است. ۳) حلقه چهارگان است. ۴) حوزه صحیح است.

۲ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر برقرار است؟

۱) عناصر وارون‌ناپذیر حلقه R زیرگروهی از $(R,\cdot)$ است.

۲) اگر R یک حلقه و عضو غیرصفر $a\in R$ دارای بیش از یک وارون راست باشد، آن‌گاه a دارای بی‌نهایت وارون راست است.

۳) اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $(R,+)$ یک نیم‌گروه است.

۴) اگر R حلقه‌ای یکدار و عضو غیرصفر $a\in R$ دارای بیش از یک وارون باشد، آن‌گاه a دارای بی‌نهایت وارون راست است.

۳ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) هر حلقه ناصفر بدون مقسوم‌علیه صفر یک حلقه تقسیم است. ۲) هر حوزه صحیح یک میدان است.

۳) هر حلقه تقسیم متناهی یک میدان است. ۴) هر حلقه ناصفر متناهی بدون مقسوم‌علیه صفر یک میدان است.

۴ـ فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد به طوری که به ازای هر $x\in R$ داشته باشیم $x^۳+۲x^۲+۳=\circ$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) به ازای هر $x\in R$ داریم $۲x=\circ$ ۲) به ازای هر $x\in R$ داریم $x^۲=x$

۳) به ازای هر $x\in R$ داریم $۳x=\circ$ ۴) R حلقه‌ای جابه‌جایی است.

۵ـ فرض کنید R یک حوزه صحیح و عضو مخالف صفر x متعلق به R باشد. در این صورت:

۱) $\forall a,b\in R;\ xa=xb\Rightarrow a=b$ ۲) $\forall a,b\in R;\ xa=xb\Rightarrow a=-b$

۳) $\forall a,b\in R;\ xa=xb\Rightarrow a=b=\circ$ ۴) $\forall a,b\in R;\ xa=xb\Rightarrow a\neq b$

۶ـ وارون ضربی عضو $\overline{۲}$ در حلقه $(\mathbb{Z}_{۱۲},+,\cdot)$ کدام است؟

۱) $\overline{۲}$ ۲) $\overline{۳}$ ۳) $\overline{۶}$ ۴) وجود ندارد.

۷ـ فرض کنید R یک حوزه صحیح باشد. کدام‌یک از موارد زیر برقرار نیست؟

۱) هر عضو یکه R مقسوم‌علیه صفر نیست. ۲) صفر تنها عضو پوچ‌توان است.

۳) ∘ و ۱ تنها عناصر خودتوان هستند. ۴) در حلقه R قوانین حذف برقرار نیست.

۸ـ در حلقه چهارگان‌ها وارون $i+۲j-۳k$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}i+\frac{۱}{۷}j-\frac{۳}{۱۴}k$ ۲) $-\frac{۱}{۱۴}i-\frac{۱}{۷}j+\frac{۳}{۱۴}k$ ۳) $\frac{۱}{۴}i+\frac{۱}{۲}j-\frac{۳}{۴}k$ ۴) $\frac{۱}{۱۴}i+\frac{۱}{۷}j+\frac{۳}{۱۴}k$

۹ـ فرض کنید R یک حلقه منظم باشد. یعنی به ازای هر $a\in R$ عضو $b\in R$ موجود است به طوری که $aba=a$. در این صورت:

۱) R حلقه بخشی است. ۲) به ازای هر عضو خودتوان، حلقه R منظم است.

۳) به ازای هر عضو وارون‌پذیر، حلقه R منظم است. ۴) همه موارد

۱۰ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) حلقه R جابه‌جایی است اگر و تنها اگر به ازای هر $a,b\in R$ داشته باشیم $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$

۲) حلقه R جابه‌جایی است اگر و تنها اگر به ازای هر $a,b\in R$ داشته باشیم $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

۳) حلقه R جابه‌جایی است اگر و تنها اگر به ازای هر $a,b\in R$ داشته باشیم $(ab)^۲=a^۲b^۲$

۴) حلقه R یک حوزه صحیح با مشخصه $p>\circ$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $a,b\in R$ داریم $(a+b)^p=a^p+b^p$

فصل هشتم

«زیرحلقه‌ها و ایده‌آل‌ها»

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال۱: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تحت جمع و ضرب به پیمانه۱۲ تشکیل یک زیرحلقه می‌دهد.

۱) $A=\{۱,۲,۳,۴,۶\}$ ۲) $B=\{۸,۹,۱۱\}$ ۳) $C=\{۰,۳,۶,۹\}$ ۴) $D=\{۰,۳,۶,۹,۱۰\}$

پاسخ: گزینه «۳» برای پیدا کردن مجموعه‌ای که نسبت به جمع و ضرب به پیمانه ۱۲ تشکیل یک زیرحلقه دهد از محک زیرحلقه استفاده می‌کنیم و ابتدا جداول کیلی، نسبت به عمل جمع را به فرم زیر تشکیل می‌دهیم:

بررسی گزینه (۱)

+	۱	۲	۳	۴	۶
۱	۱	۳	۴	۵	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۱۰
۶	۷	۸	۹	۱۰	۰

همان‌طور که در جدول روبرو مشاهده می‌کنید مجموعه A تشکیل یک زیرحلقه نمی‌دهد. زیرا به عنوان مثال، در سطر اول داریم $۱+۶=۷\notin A$.

بررسی گزینه (۲)

+	۸	۹	۱۱
۸	۴	۵	۷
۹	۵	۶	۸
۱۱	۷	۸	۱۰

مجموعه B یک زیرحلقه نمی‌باشد، زیرا مثلاً در سطر اول جدول روبرو می‌بینیم که $۸+۸=۱۶\underset{۱۲}{\equiv}۴\notin B$.

بررسی گزینه (۳)

+	۰	۳	۶	۹
۰	۰	۳	۶	۹
۳	۳	۶	۹	۰
۶	۶	۹	۰	۳
۹	۹	۰	۳	۶

مجموعه C تشکیل یک زیرحلقه می‌دهد. زیرا تمام اعضای موجود در جدول جمع به مجموعه C تعلق دارند.
می‌توانید عمل ضرب روی C را نیز بررسی کنید.

بررسی گزینه (۴)

+	۰	۳	۶	۹	۱۰
۰	۰	۳	۶	۹	۱۰
۳	۳	۶	۹	۰	۱
۶	۶	۹	۰	۳	۴
۹	۹	۰	۳	۶	۷
۱۰	۱۰	۱	۴	۷	۸

مجموعه D تشکیل یک زیرحلقه نمی‌دهد. زیرا مثلاً در سطر دوم داریم $۳+۱۰=۱۳\underset{۱۲}{\equiv}۱\notin D$.

مثال۲: کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) مرکز حلقه R یک زیرحلقه است.
۲) هر ایده‌آل یک زیرحلقه است.
۳) هر زیرحلقه یک ایده‌آل است.
۴) زیرحلقهٔ یک حلقه ناجابه‌جایی می‌تواند جابه‌جایی باشد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به آنچه در متن درس بیان شده داریم، مرکز حلقه R یک زیرحلقه است و هر ایده‌آل یک زیرحلقه می‌باشد و هر زیرحلقه از یک حلقه ناجابه‌جایی، می‌تواند جابه‌جایی باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند. اما اگر زیرحلقه $\mathbb{Z}$ را از حلقه $\mathbb{Q}$ در نظر بگیرید به ازای عناصر $۲\in\mathbb{Z}$ و $\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Q}$ داریم $\frac{۲}{۳}\notin\mathbb{Z}$. بنابراین $\mathbb{Z}$ ایده‌آل $\mathbb{Q}$ نمی‌باشد. پس گزینه (۳) نادرست است.

مثال۳: فرض کنید R یک حلقه باشد. کدام‌یک از موارد زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) اگر R جابه‌جایی باشد، آن‌گاه هر زیرحلقه از R نیز جابه‌جایی است.

۲) اگر F یک میدان باشد، آن‌گاه هر زیرحلقه S از F یک زیرمیدان F است.

۳) اگر R حلقه یکدار و $1_R \in R$ و S زیرحلقه‌ای از R باشد به طوری که $1_S \neq 1_R$، آن‌گاه 1_S مقسوم علیه صفر R است.

۴) هر ایده‌آل چپ I یک ایده‌آل دوطرفه حلقه R است اگر و تنها اگر R جابه‌جایی باشد.

پاسخ: گزینه «۲» بررسی گزینه (۱)، اگر R یک حلقه جابه‌جایی باشد، آن‌گاه هر زیرحلقه R نیز جابه‌جایی است. مثلاً $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ یک حلقه جابه‌جایی است و $(n\mathbb{Z},+,\cdot)$ نیز زیرحلقه‌ای جابه‌جایی از آن است. پس گزینه (۱) درست است. گزینه (۳) نیز درست است، مثلاً اگر حلقه $R=\{(a,b)\,|\,(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید. زیرحلقه $S=\{(a,0)\,|\,(a,0)\in\mathbb{R}\times\{0\}\}$ دارای یکه $(1,0)$ است و این زوج مرتب مقسوم‌علیه صفر R است. در بررسی گزینه (۴) می‌توانیم بگوییم اگر ایده‌آل $aR=\{ar\,|\,r\in R\}$ را در حلقه جابه‌جایی R در نظر بگیریم در این صورت aR ایده‌آل دوطرفه خواهد بود. پس گزینه (۴) نیز درست است. برای بررسی گزینه (۲)، حلقه‌ی $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ را در نظر بگیرید. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ زیرحلقه‌ای از $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ است، ولی میدان نیست. زیرا دارای وارون ضربی نیست. بنابراین گزینه (۲) نادرست است.

مثال۴: فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند به طوری که I ایده‌آل J و J ایده‌آل R باشد، در این صورت I ایده‌آل R است اگر:

۱) $I\subseteq J\subseteq R$ ۲) $J\subseteq I$ یا $I\subseteq J$ ۳) R حلقه ساده باشد. ۴) R حلقه منظم باشد.

پاسخ: گزینه «۴» اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند به طوری که I ایده‌آل J و J ایده‌آل R باشد، اگر R منظم باشد مطمئن هستیم I ایده‌آل R است. پس گزینه (۴) درست است.

مثال۵: فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، آن‌گاه $I\cup J$ ایده‌آلی از R است اگر:

۱) R حلقه جابه‌جایی باشد. ۲) R حلقه جابه‌جایی یکدار باشد.

۳) $I\cap J\subseteq J$ و $I\cap J\subseteq I$ ۴) $I\subseteq J$ یا $J\subseteq I$

پاسخ: گزینه «۴» اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، آن‌گاه $I\cup J$ ایده‌آل R است اگر و تنها اگر $I\subseteq J$ یا $J\subseteq I$. پس گزینه (۴) درست است.

مثال۶: فرض کنید I ایده‌آل حلقه $\mathbb{Z}$ باشد. نشان دهید عدد صحیح نامنفی n موجود است به طوری که $I=\langle n\rangle$.

پاسخ: فرض کنید I ایده‌آل حلقه $\mathbb{Z}$ باشد. در این صورت $(I,+)$ یک زیرگروه $(\mathbb{Z},+)$ است. از طرفی هر زیرگروه $\mathbb{Z}$ به صورت $n\mathbb{Z}$ است پس:

$$I=n\mathbb{Z}=\{nk\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\langle n\rangle$$

با توجه به مثال قبل می‌توان گفت حلقه اعداد صحیح $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ یک PID است.

مثال۷: نشان دهید حلقه‌های تقسیم PID هستند.

پاسخ: فرض کنید D یک حلقه تقسیم باشد. در این صورت D دارای تنها ایده‌آل‌های بدیهی است. پس $I_1=\langle 0\rangle$ و $I_2=D$ ایده‌آل‌های حلقه تقسیم D هستند. بنابراین حلقه تقسیم D یک PID است.

مثال۸: کدام‌یک از حلقه‌های زیر یک PID نیست.

۱) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ۲) $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ ۳) $(3\mathbb{Z},+,\cdot)$ ۴) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر کدام‌یک PID هستند. ولی گزینه (۲) دارای مقسوم علیه‌های صفر $\overline{3}$ و $\overline{2}$ است، لذا یک حوزه صحیح نیست. پس PID نمی‌باشد.

مثال۹: فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از حلقه R باشد. ایده‌آل I از حلقه R تولید شده توسط S است، هرگاه:

۱) $I \subseteq S$

۲) $S \subseteq I$

۳) به ازای هر ایده‌آل J از حلقه R به طوری که $S \subseteq J$، آن‌گاه $I \subseteq J$.

۴) گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح هستند.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به آنچه در تعریف دیدیم، **ایده‌آل I از حلقه R تولید شده توسط زیرمجموعه S است، هرگاه $S \subseteq I$ و به ازای هر ایده‌آل J از حلقه R اگر $S \subseteq J$ باشد، آن‌گاه $I \subseteq J$.** بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) درست هستند.

مثال۱۰: فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. ایده‌آل $I+J$ ایده‌آل تولید شده توسط کدام مجموعه مولد است؟

۱) $<I+J>$　　۲) $<I \cap J>$　　۳) $<I \cup J>$　　۴) $I+J$ اصلاً ایده‌آل نیست.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قضیه‌ی قبل، آموختیم **اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، آن‌گاه $I+J=<I \cup J>$** و این یعنی ایده‌آل $I+J$ تولید شده توسط مجموعه مولد $<I \cup J>$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مثال۱۱: فرض کنید $n\mathbb{Z}$ و $m\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $\mathbb{Z}$ باشند. در این صورت کدام مجموعه، ایده‌آل حلقه $\mathbb{Z}$ است؟

۱) $n\mathbb{Z}-m\mathbb{Z}$　　۲) $m\mathbb{Z}-n\mathbb{Z}$　　۳) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$　　۴) $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z}$

پاسخ: گزینه «۳» $n\mathbb{Z}$ و $m\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $\mathbb{Z}$ هستند. طبق قضیه، اشتراک ایده‌آل‌های حلقه R، یک ایده‌آل است، بنابراین $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ ایده‌آلی از حلقه $\mathbb{Z}$ است، لذا گزینه (۳) درست است. اما طبق مطالب ارائه شده در متن درس می‌دانیم اگر $(n,m)=d$، آن‌گاه $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$ و ایده‌آل حلقه $\mathbb{Z}$ خواهد بود و اگر $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ یا $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$، آن‌گاه $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z}$ ایده‌آل حلقه $\mathbb{Z}$ خواهد بود. اما هیچ‌کدام از این شرایط برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) بیان نشده است. بنابراین این گزینه‌ها برقرار نیستند.

مثال۱۲: فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت کدام گزینه همواره درست نمی‌باشد؟

۱) $IJ \subseteq I \cap J$　　۲) $I \cap J = IJ$　　۳) $I+J$ ایده‌آلی از R است.　　۴) IJ ایده‌آلی از R است.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آنچه آموختیم می‌دانیم اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، آن‌گاه همواره **$IJ \subseteq I \cap J$، همچنین $I+J$ و IJ ایده‌آلی از R است.** بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست هستند. حال قرار دهید $I=2\mathbb{Z}$ و $J=4\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $\mathbb{Z}$ باشند، آن‌گاه داریم $IJ=8\mathbb{Z}$ و $I \cap J = 4\mathbb{Z}$. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید $IJ \neq I \cap J$. بنابراین گزینه (۲) درست نمی‌باشد.

مثال۱۳: فرض کنید I، J و K ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت:

۱) $(I \cap J:K)=(I:K)+(J:K)$　　۲) $(I:J+K)=(I:J)+(I:K)$

۳) $(I:J \cap K)=(I:J) \cap (I:K)$　　۴) $(I:J+K)=(I:J) \cap (I:K)$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به خصوصیات مربوط به ایده‌آل‌های خارج قسمتی گزینه (۳) درست است.

مثال۱۴: فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت:

۱) $I \cap J = IJ$　　۲) $IJ \lhd I$　　۳) $I \cap J \subseteq IJ$　　۴) $I+I=I$

پاسخ: گزینه «۲» گزینه (۱) و (۳) در صورتی برقرار هستند که I و J متباین باشند. گزینه (۴) در صورتی برقرار است که R حلقه یکدار باشد. از طرفی می‌دانیم اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، آن‌گاه IJ ایده‌آلی از I و ایده‌آلی از J خواهد بود. لذا فقط گزینه (۲) صحیح است.

مثال۱۵: فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، در این صورت:

۱) $IJ \subseteq I \cap J$　　۲) $IJ = I \cap J$　　۳) $I \cap J \subseteq IJ$　　۴) $I + J = I$

پاسخ: گزینه «۱» گزینه‌های (۲) و (۳) در صورتی درست هستند که ایده‌آل‌های I و J متباین باشند و گزینه (۴) نیز در صورتی که حلقه یکدار و $J \subseteq I$ باشد، برقرار است. در قسمت‌های قبل نشان دادیم $IJ \subseteq I \cap J$ است. پس فقط گزینه (۱) درست می‌باشد.

مثال۱۶: فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل آن باشد. در یک حلقه خارج قسمتی کدام مورد برقرار نیست.

۱) اگر R حلقه یکدار و جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $\frac{R}{I}$ یکدار و جابه‌جایی است.

۲) اگر R حلقه یکدار و $a \in R$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $a + I$ نیز در $\frac{R}{I}$ وارون‌پذیر است.

۳) اگر R یک حوزه صحیح باشد، آن‌گاه $\frac{R}{I}$ الزاماً حوزه صحیح نیست.

۴) اگر $\frac{R}{I}$ دارای مقسوم علیه صفر باشد، آن‌گاه R نیز مقسوم علیه صفر است.

پاسخ: گزینه «۴» اگر R یک حلقه یکدار و جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $\frac{R}{I}$ نیز یکدار و جابه‌جایی است. پس گزینه (۱) درست است. اگر R یک حلقه یکدار و $a \in R$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $a + I$ نیز در $\frac{R}{I}$ وارون‌پذیر است. لذا گزینه (۲) نیز درست است. حال به عنوان مثال، حوزه صحیح $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. $۴\mathbb{Z}$ ایده‌آل $\mathbb{Z}$ است، لذا داریم $\frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}} = \{۰+۴\mathbb{Z}, ۱+۴\mathbb{Z}, ۲+۴\mathbb{Z}, ۳+۴\mathbb{Z}\}$. ولی $\frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}}$ یک حوزه صحیح نیست. زیرا $(۲+۴\mathbb{Z})(۲+۴\mathbb{Z}) = ۴\mathbb{Z}$ ولی $۲+۴\mathbb{Z} \neq ۴\mathbb{Z}$ بنابراین گزینه (۳) نیز صحیح است. مجدداً به مثال بیان شده توجه کنید، همان طور که می‌بینید $\frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}}$ دارای مقسوم علیه صفر است. ولی حلقه $\mathbb{Z}$ فاقد مقسوم علیه صفر نابدیهی است. بنابراین **اگر حلقه $\frac{R}{I}$ دارای مقسوم علیه صفر باشد، آن‌گاه الزاماً R دارای مقسوم علیه صفر نیست.** پس گزینه (۴) همواره برقرار نمی‌باشد.

آزمون فصل هشتم

۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) یک زیرحلقه از حلقه جابه‌جایی، جابه‌جایی است.

۲) یک زیرحلقه از حلقه ناجابه‌جایی، ایده‌آل است.

۳) یک زیرحلقه از حلقه ناجابه‌جایی، می‌تواند جابه‌جایی باشد.

۴) $m\mathbb{Z}$ زیرحلقه‌ای از حلقه $n\mathbb{Z}$ است اگر و تنها اگر $n|m$

۲ـ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت حلقه R جابه‌جایی است اگر:

۱) $Z(R)$ زیرحلقه‌ای از حلقه R باشد.

۲) هر ایده‌آل یک زیرحلقه باشد.

۳) هر زیرحلقه یک ایده‌آل باشد.

۴) اگر به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $x^{2} + x \in Z(R)$

۳ـ مشخصه حلقه $\mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{4}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۸　۴) صفر

۴ـ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل راست و J ایده‌آل چپ حلقه R باشند. در این صورت:

۱) $IJ = I \bigcap J$　۲) $IJ \subseteq I \bigcap J$　۳) $IJ \supseteq I \bigcap J$　۴) IJ ایده‌آل دو طرفه است.

۵ـ فرض کنید R یک حلقه یکدار و دارای عضو یکه باشد. در این صورت:

۱) ایده‌آل I از حلقه R، ایده‌آل سره است.

۲) ایده‌آل I از حلقه R، ایده‌آل غیربدیهی است.

۳) ایده‌آل I از حلقه R، ایده‌آل سره نیست.

۴) هر عضو a از ایده‌آل I، وارون‌پذیر نیست.

۶ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و I، J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت:

۱) اگر $I \subseteq J$ آن‌گاه $Ann(I) \subseteq Ann(J)$

۲) $I \subseteq Ann(Ann(I))$

۳) $Ann(I) = Ann(Ann(Ann(I)))$

۴) هر سه مورد

۷ـ حلقه $\mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Q}$ دارای چند ایده‌آل است؟

۱) ۱　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۲

۸ـ در حلقه $\mathbb{Z}_{27}$ ایده‌آل پوچ برابر است با:

۱) $<3>$　۲) $<9>$　۳) $<27>$　۴) $<0>$

۹ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و I ایده‌آلی از R باشد. رادیکال I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \left\{ r \in R \middle| r^{n} \in I; \text{عدد صحیح مثبت } n \text{ موجود است} \right\}$$

کدام‌یک از موارد زیر در خصوص $\sqrt{I}$ درست نمی‌باشد؟

۱) $\sqrt{I}$ ایده‌آلی از حلقه R است.

۲) $\sqrt{I} \subseteq I$

۳) اگر $\sqrt{I} = I$، آن‌گاه I را ایده‌آل رادیکال می‌نامیم.

۴) $I \subseteq \sqrt{I}$

۱۰ـ فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابه‌جایی باشد. اگر a عضو خودتوان حلقه R باشد و $a \in Z(R)$، آن‌گاه:

۱) $1-a$ خودتوان است و $1-a \in Z(R)$

۲) aR و $(1-a)R$ ایده‌آل‌هایی در R‌اند.

۳) $R = aR \oplus (1-a)R$

۴) هر سه مورد

۱۱ـ فرض کنید J و I ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. اگر $I \subseteq J \subset R$ به طوری که I ایده‌آلی از J و J ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه I ایده‌آلی از R است اگر:

۱) I ایده‌آل راست باشد. ۲) R حلقه منظم باشد. ۳) R حلقه جابه‌جایی باشد. ۴) I ایده‌آل دوطرفه R باشد.

۱۲ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی باشد. حلقه R یک میدان است اگر:

۱) R یک حلقه ساده باشد. ۲) R یک حوزه صحیح باشد. ۳) R یک حلقه یکدار باشد. ۴) R یک حلقه ساده، یکدار باشد.

۱۳ـ فرض کنید $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح و $4\mathbb{Z}$ و $6\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $\mathbb{Z}$ باشند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$

۲) $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ ایده‌آلی از حلقه $\mathbb{Z}$ است.

۳) $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

۴) $(4\mathbb{Z})(6\mathbb{Z})$ ایده‌آلی از حلقه $\mathbb{Z}$ است.

۱۴ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی، I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. اگر $I + J = R$، آن‌گاه:

۱) $I \cap J = IJ$

۲) به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم $I^n + J^n = R$

۳) $IJ \subseteq I \cap J$

۴) هر سه مورد صحیح است.

۱۵ـ فرض کنید R یک حلقه ساده یکدار باشد، در این صورت کدام گزینه برقرار نیست؟

۱) $Z(R)$ یک میدان است.

۲) اگر I به‌عنوان حلقه جابه‌جایی ایده‌آل چپ نابدیهی R باشد، آن‌گاه R یک میدان است.

۳) CharR موجود نمی‌باشد.

۴) CharR یا صفر است یا یک عدد اول

فصل نهم

«ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال و همریختی حلقه‌ها

تست‌های تألیفی فصل نهم

مثال ۱: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است.

۱) اگر P ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه $\sqrt{P}=P$.

۲) اگر P ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه برای عدد طبیعی n داریم $\sqrt{P^n}=P$.

۳) اگر P ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح است.

۴) اگر P ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه $\frac{R}{P}$ یک مقسوم علیه صفر نابدیهی دارد.

پاسخ: گزینه «۴» اگر P ایده‌آل اول حلقه جابه‌جایی R باشد، آن‌گاه $\sqrt{P}=P$ و عدد صحیح مثبت n موجود است به طوری که $\sqrt{P^n}=P$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) با توجه به خصوصیات رادیکال اول که در مسائل قبلی اثبات کردیم برقرارند. در مورد گزینه (۳) می‌توانیم بگوئیم اگر R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و P ایده‌آل اول R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح است. بنابراین گزینه (۳) درست است. ولی در مورد گزینه (۴) حلقه خارج قسمتی $\frac{\mathbb{Z}}{۳\mathbb{Z}}=\{۰+۳\mathbb{Z}, ۱+۳\mathbb{Z}, ۲+۳\mathbb{Z}\}$ را در نظر بگیرید. $۳\mathbb{Z}$ ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ است، ولی $\frac{\mathbb{Z}}{۳\mathbb{Z}}$ دارای مقسوم علیه صفر نابدیهی نیست. بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

مثال ۲: فرض کنید $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، کدام‌یک از احکام زیر نادرست است؟

۱) $I_۱\cap I_۲$ ایده‌آل حلقه R است.

۲) اگر $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های اول باشند، آن‌گاه $I_۱\cap I_۲$ ایده‌آل اول حلقه R است.

۳) $I_۱I_۲\subseteq I_۱\cap I_۲$

۴) اگر $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های اول باشند، آن‌گاه $I_۱\cap I_۲$ الزاماً ایده‌آل اول حلقه R نمی‌باشد.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آنچه در فصل ایده‌آل‌ها و حلقه‌ها آموختیم می‌دانیم اگر $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های حلقه R باشند، آن‌گاه $I_۱\cap I_۲$ ایده‌آل حلقه R و $I_۱I_۲\subseteq I_۱\cap I_۲$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) درست هستند. حال فرض کنید $I_۱=۳\mathbb{Z}$ و $I_۲=۵\mathbb{Z}$. با توجه به این‌که هر ایده‌آل در حلقه $\mathbb{Z}$ بفرم $p\mathbb{Z}$ هایی هستند که در آن p عدد اول است، لذا $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های اول هستند. اما $۳\mathbb{Z}\cap ۵\mathbb{Z}=۱۵\mathbb{Z}$ ایده‌آل اول حلقه $\mathbb{Z}$ نمی‌باشد. بنابراین گزینه (۴) درست است و گزینه (۲) نادرست می‌باشد.

مثال ۳: اگر R یک حلقه جابه‌جایی باشد، کدام گزینه برقرار است؟

۱) هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است.

۲) برای هر ایده‌آل اول P اگر $a\notin P$ داریم $(P,a)=R$.

۳) هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است.

۴) اگر R یکدار باشد، هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است.

پاسخ: گزینه «۴» در یک حلقه جابه‌جایی یکدار هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است. پس گزینه (۴) درست است. گزینه (۱) نادرست است مثلاً در حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، ایده‌آل $\langle ۰\rangle$ اول است ولی ماکسیمال نیست و داریم $\langle ۰\rangle\subset\langle ۲\rangle\subset\mathbb{Z}$. پس هر ایده‌آل اول، الزاماً ماکسیمال نیست. گزینه (۲) نادرست است. زیرا وقتی ایده‌آل P اول باشد به ازای $a\in R$ داریم، $(P,a)=۱$ به طوری که $a\notin P$. برای بررسی گزینه (۳) فرض کنید $R=\{۲k|k\in\mathbb{Z}\}$ یک حلقه غیریکدار و $I=\langle ۴\rangle$ ایده‌آل R باشد. در مثال قبل دیدیم I ایده‌آل ماکسیمال است، ولی اول نیست زیرا $۲\times ۲\in I$ ولی $۲\notin I$. پس در حلقه غیریکدار R، الزاماً هر ایده‌آل ماکسیمال، اول نیست. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند.

مثال۴: فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد و به ازای هر $x \in R$، $x^{۱۳۹۲} = x$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $Char(R) = ۲$
۲) هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است.
۳) R حلقه جابه‌جایی است.
۴) R دارای عضو پوچ‌توان غیرصفر است.

پاسخ: گزینه «۴» بنابر مطالب ارائه شده در فصل حلقه‌ها دیدیم، اگر به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $x^{۱۳۹۲} = x$، نتیجه می‌شود $Char(R) = ۲$، R یک حلقه جابه‌جایی است و **R دارای عضو پوچ‌توان غیرصفر نیست**. همچنین چون R یک حلقه یکدار است با توجه به مطالب ارائه شده در متن درس آموختیم به ازای هر $x \in R$ و $n > ۱$ اگر $x^n = x$ باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند و گزینه (۴) نادرست است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵: فرض کنید R و S دو حلقه باشند به طوری که $f: R \to S$ یک همریختی حلقه‌ها است. در این صورت:

۱) $Imf = f(R)$ زیرحلقه‌ای از S است.
۲) kerf یک ایده‌آل از R است.
۳) $kerf = \{۰\}$ اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.
۴) همه موارد

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به مثال‌های قبل گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح هستند.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: فرض کنید $f: R \to S$ یک همریختی پوشا باشد به‌طوری که $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های حلقه R، $J_۱$ و $J_۲$ ایده‌آل‌های حلقه S باشند. در این صورت کدام گزینه برقرار نیست.

۱) $f(I_۱I_۲) = f(I_۱)f(I_۲)$
۲) $f^{-۱}(J_۱J_۲) = f^{-۱}(J_۱)f^{-۱}(J_۲)$
۳) $f^{-۱}(\sqrt{J_۱}) = \sqrt{f^{-۱}(J_۱)}$
۴) $f^{-۱}(J_۱ + J_۲) = f^{-۱}(J_۱) + f^{-۱}(J_۲)$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مطالب ارائه شده در متن درس آموختیم، اگر $f: R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد به طوری که $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های حلقه R، $J_۱$ و $J_۲$ ایده‌آل‌های حلقه S باشند، آن‌گاه $f(I_۱I_۲) = f(I_۱)f(I_۲)$ و $f^{-۱}(\sqrt{J_۱}) = \sqrt{f^{-۱}(J_۲)}$. لذا گزینه‌های (۱) و (۳) برقرار هستند. حال ایده‌آل‌های $J_۱$ و $J_۲$ از حلقه S را در نظر بگیرید. می‌دانیم $J_۱ \subseteq J_۱ + J_۲$. پس $f^{-۱}(J_۱) \subseteq f^{-۱}(J_۱ + J_۲)$ به همین ترتیب داریم $f^{-۱}(J_۲) \subseteq f^{-۱}(J_۱ + J_۲)$. بنابراین $f^{-۱}(J_۱) + f^{-۱}(J_۲) \subseteq f^{-۱}(J_۱ + J_۲)$. همچنین عکس این نامساوی به‌وضوح برقرار است. بنابراین گزینه (۴) نیز درست است. حال فرض کنید R یک حلقه باشد و همریختی $f: \mathbb{Q} \to R$ را با ضابطه $f(x) = ۰$، $\forall x \in \mathbb{Q}$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $J_۱$ و $J_۲$ ایده‌آل‌های R باشند. بنابراین $J_۱ = J_۲ = \{۰\}$ است. در این صورت داریم $f^{-۱}(J_۱J_۲) = \mathbb{Q}$ و $f^{-۱}(J_۱)f^{-۱}(J_۲) = \{۰\}$. همان‌طور که مشاهده می‌شود $f^{-۱}(J_۱J_۲) \neq f^{-۱}(J_۱)f^{-۱}(J_۲)$، ولی $f^{-۱}(J_۱J_۲) \supseteq f^{-۱}(J_۱)f^{-۱}(J_۲)$. لذا گزینه (۲) نادرست است. با توجه به مطالب ارائه شده، گزینه ۲ پاسخ مورد نظر است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: اگر $f: R \to S$ یک یکریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت کدام گزینه همیشه درست نیست؟

۱) اگر $a \in R$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $f(a) \in S$ پوچ‌توان است.
۲) اگر $a \in R$ خودتوان باشد، آن‌گاه $f(a) \in S$ خودتوان است.
۳) اگر R حوزه صحیح باشد، آن‌گاه $۱_S = f(۱)_R$
۴) اگر $۱_R \in R$، آن‌گاه $۱_S \neq f(۱_R)$

پاسخ: گزینه «۴» گزینه (۴) همواره برقرار نیست، زیرا f یک یکریختی حلقه‌ای است، لذا f پوشاست. پس اگر $۱_R \in R$ باشد، آن‌گاه $f(۱_R) = ۱_S$. ولی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) با توجه به خصوصیات همریختی حلقه‌ها که تا این‌جا بیان کردیم، درست هستند.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: فرض کنید $f: R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. اگر $I = kerf$، آن‌گاه:

۱) $\frac{R}{I} \cong S$
۲) $\frac{R}{I} \cong R$
۳) $\frac{R}{I} \cong Imf$
۴) $\frac{R}{I} \cong kerf$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قضیه اساسی یکریختی $\frac{R}{I} \cong Imf$. پس گزینه (۳) درست است.

مثال۹: فرض کنید I و J ایده‌آل‌های حلقه R باشند در چه صورتی $\frac{\frac{R}{I}}{\frac{J}{I}} \cong \frac{R}{J}$.

۱) $I+J=R$ ۲) $J \subseteq I$ ۳) $I \subseteq J$ ۴) R پوشا باشد.

پاسخ: گزینه «۳» بر طبق قضیه اول یکریختی اگر $I \subseteq J$، آن‌گاه $\frac{\frac{R}{I}}{\frac{J}{I}} \cong \frac{R}{J}$. پس گزینه (۳) درست است.

مثال۱۰: حلقه‌ی $\frac{۴\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z} \bigcap ۱۲\mathbb{Z}}$ **یکریخت است با:**

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\circ$ ۳) $\frac{\mathbb{Z}}{۳\mathbb{Z}}$ ۴) $\frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قضیه‌ی دوم یکریختی‌ها داریم:

$$\frac{۴\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z} \bigcap ۱۲\mathbb{Z}} \cong \frac{۴\mathbb{Z}+۱۲\mathbb{Z}}{۱۲\mathbb{Z}} \cong \frac{۴\mathbb{Z}}{۱۲\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{۳\mathbb{Z}}$$

مثال۱۱: حلقه $(\mathbb{Z}_{۱۲\circ},+,.)$ **با کدام‌یک از حلقه‌های زیر یکریخت است؟**

۱) $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۵ \times \mathbb{Z}_۳$ ۲) $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۵ \times \mathbb{Z}_۳$ ۳) $\mathbb{Z}_۸ \times \mathbb{Z}_۵ \times \mathbb{Z}_۳$ ۴) $\mathbb{Z}_۸ \times \mathbb{Z}_{۱۵}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که $۳ \times ۵ \times ۲^۳ = ۱۰۰$، لذا با توجه به آنچه در متن درس آموختیم می‌دانیم، اگر $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ آن‌گاه:

$$\frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k} \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_۱^{\alpha_۱} \rangle} \times \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_۲^{\alpha_۲} \rangle} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_k^{\alpha_k} \rangle} \cong \mathbb{Z}_{p_۱^{\alpha_۱}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\mathbb{Z}}{\langle ۱۲\circ \rangle} = \frac{\mathbb{Z}}{\langle ۲^۳ \times ۵ \times ۳ \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\langle ۲^۳ \rangle} \times \frac{\mathbb{Z}}{\langle ۵ \rangle} \times \frac{\mathbb{Z}}{\langle ۳ \rangle} \cong \mathbb{Z}_۸ \times \mathbb{Z}_۵ \times \mathbb{Z}_۳$$

مثال۱۲: فرض کنید $\mathbb{Z}$ یک حلقه، m و n اعداد صحیح مثبت باشند. در این صورت کدام گزینه <u>برقرار نیست</u>؟

۱) اگر $\gcd(n,m)=۱$، آن‌گاه $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

۲) اگر $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ یک همریختی پوشا با ضابطه $\forall x \in \mathbb{Z}; f(x)=(\bar{a},\bar{b})$ باشد، آن‌گاه $\ker f = nm\mathbb{Z}$

۳) اگر $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ یک همریختی پوشا با ضابطه $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x)=(\bar{a},\bar{b})$ $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ f(x)=(\bar{a},\bar{b})$ باشد، آن‌گاه $\ker f = [n,m]\mathbb{Z}$

۴) اگر $n \geq ۲$، m و n و $m \mid n$، آن‌گاه $\frac{\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}}{\frac{m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}} \cong \mathbb{Z}_m$

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) با توجه به خصوصیات همریختی‌ها که تا این‌جا بیان کردیم، صحیح هستند ولی گزینه (۲) غلط است. زیرا برای برقراری $\ker f = nm\mathbb{Z}$ در همریختی پوشای $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ با ضابطه $\forall_x \in \mathbb{Z}\ ,\ f(x)=(\bar{a},\bar{b})$ لازم است داشته باشیم $\gcd(n,m)=۱$.

مثال ۱۳: مشخصه حلقه $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{۲\mathbb{Z}\times۳\mathbb{Z}\times۴\mathbb{Z}}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم $R=\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{۲\mathbb{Z}\times۳\mathbb{Z}\times۴\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}}{۲\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{۳\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۴$. پس برای مشخصه R می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\mathrm{Char}(R)=[\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_۲),\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_۳),\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_۴)]=[۲,۳,۴]=۱۲$$

این بخش را با مثالی که به نحوی با استفاده از تمام مطالبی که تا این‌جا خوانده‌ایم به دست می‌آید، به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱۴: فرض کنید f یک همریختی از حلقه جابه‌جایی و یکدار R به حلقه جابه‌جایی و یکدار S باشد. در این صورت:

۱) S میدان است اگر و تنها اگر kerf ایده‌آل ماکسیمال باشد.

۲) S میدان است اگر و تنها اگر kerf ایده‌آل اول باشد.

۳) S میدان است اگر و تنها اگر kerf ایده‌آل ماکسیمال از همریختی پوشای f باشد.

۴) S میدان است اگر و تنها اگر kerf ایده‌آل اول از همریختی پوشای f باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مطالب ارائه شده در متن درس تنها گزینه (۳) درست است. زیرا در همریختی پوشای $f:R\to S$ داریم $\frac{R}{\ker f}\cong S$، S یک میدان است اگر و تنها اگر kerf ایده‌آل ماکسیمال باشد.

مثال ۱۵: در چه صورت در حلقه R، هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است؟

۱) R حلقه یکدار باشد. ۲) حلقه R یکدار و جابه‌جایی باشد.

۳) R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد. ۴) R یک حلقه موضعی باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در یک حوزه ایده‌آل اصلی هر ایده‌آل **غیربدیهی** اول، ماکسیمال است پس گزینه (۳) درست می‌باشد.

مثال ۱۶: فرض کنید P تنها ایده‌آل اول حلقه جابه‌جایی یکدار و ناصفر R باشد، در این‌صورت:

۱) R حلقه موضعی است چون تنها دارای یک ایده‌آل اول است. ۲) تنها اعضای خودتوان R، صفر و ۱ است.

۳) هر عضو R وارون‌پذیر و پوچ‌توان است. ۴) هر عضو R وارون‌پذیر یا پوچ‌توان است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در یک حلقه جابه‌جایی که در آن P ایده‌آل اول است، الزاماً P ایده‌آل ماکسیمال نیست. مثلاً در حوزه صحیح $\mathbb{Z}$ ایده‌آل $\langle ۰\rangle$ اول است ولی $\langle ۰\rangle$ ایده‌آل ماکسیمال نیست و چون هر حلقه موضعی دارای تنها یک ایده‌آل ماکسیمال است، لذا گزینه (۱) درست نمی‌باشد. از طرفی چون R موضعی نیست تنها اعضای خودتوان R الزاماً صفر و ۱ نیستند، پس گزینه (۲) هم نادرست است. در بررسی گزینه (۴)، با توجه به آنچه در متن درس آموختیم، می‌دانیم حلقه جابه‌جایی یکدار و ناصفر R دارای تنها یک ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر هر عضو R وارون‌پذیر یا پوچ‌توان باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۱۷: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، تحت چه شرایطی هر ایده‌آل اول حلقه R، ماکسیمال است؟

۱) عدد صحیح مثبت n موجود است به طوری که $x^n=x$

۲) اگر M ایده‌آلی از R باشد به طوری که $a\notin M$ و $M+aR=R$

۳) اگر M ایده‌آل ماکسیمال باشد به طوری که $\frac{R}{M}$ یک حوزه صحیح باشد.

۴) اگر R دارای حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به آنچه در متن درس آموختیم، می‌دانیم اگر R حلقه جابه‌جایی یکدار باشد و به ازای $x\in R$ و $n>۱$ به طوری که $x^n=x$، آن‌گاه هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است. پس گزینه (۱) درست می‌باشد.

مثال۱۸: فرض کنید R یک حلقه موضعی باشد، کدام خصوصیت برقرار نمی‌باشد.

۱) حلقه R تنها دارای یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۲) اعضای خودتوان حلقه R تنها ۰ و ۱ هستند.

۳) اعضای وارون‌ناپذیر حلقه R تشکیل یک ایده‌آل می‌دهند.

۴) عضو $a \in R$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $a \in M$.

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) با توجه به خصوصیات حلقه موضعی درست هستند. ولی گزینه (۴) اشتباه است. زیرا در یک حلقه موضعی عضو $a \in R$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $a \notin M$.

مثال۱۹: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و M ایده‌آل ماکسیمال باشد. کدام گزینه در خصوص ایده‌آل ماکسیمال M برقرار نیست؟

۱) اگر به ازای هر $x \notin M$ عضو $a \in R$ موجود باشد، آن‌گاه $1 - ax \in M$

۲) اگر $a \in M$، آن‌گاه a عضو وارون‌پذیر است.

۳) به ازای هر ایده‌آل I داریم $I \subseteq M$ یا $I + M = R$

۴) اگر $a \notin M$، آن‌گاه $M + Ra = R$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مطالب ارائه شده در متن درس آموختیم اگر به ازای هر $x \notin M$ عضو $a \in R$ موجود باشد، آن‌گاه $1 - ax \in M$ و به ازای هر ایده‌آل I داریم $I \subseteq M$ یا $I + M = R$. همچنین اگر $a \notin M$، آن‌گاه $M + Ra = R$ خواهد بود. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) در مورد ایده‌آل ماکسیمال M برقرار است. اما گزینه (۲) اشتباه است، زیرا اگر R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد و $a \in R$، آن‌گاه a عضو وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $\mathbf{a \notin M}$.

مثال۲۰: اگر I_1 و I_2 ایده‌آل‌های حلقه جابه‌جایی R باشند. آن‌گاه کدام گزینه برقرار نیست؟

۱) $I_1 I_2 = I_1 \bigcap I_2$، اگر I_1 و I_2 متباین باشند.

۲) $I_1 I_2 = I_1 \bigcap I_2$، اگر I_1 و I_2 ماکسیمال و متمایز باشند.

۳) $\frac{R}{I_1 \bigcap I_2} \cong \frac{R}{I_1} \times \frac{R}{I_2}$، اگر I_1 و I_2 متباین باشند.

۴) $\frac{R}{I_1 \bigcap I_2} \cong \frac{R_1}{I_1} \times \frac{R}{I_2}$، اگر $I_1 I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به مطالبی که تا این‌جا آموختیم برای پاسخ به این مثال می‌توانیم چنین بگوییم:

اگر I_1 و I_2 ایده‌آل‌های متباین باشند، یعنی $I_1 + I_2 = R$، آن‌گاه $I_1 I_2 = I_1 \bigcap I_2$، پس گزینه (۱) درست است. اگر I_1 و I_2 ایده‌آل‌های ماکسیمال باشند، آن‌گاه $I_1 I_2 = I_1 \bigcap I_2$. بنابراین گزینه (۲) نیز صحیح است. اگر I_1 و I_2 متباین باشند، یعنی $I_1 + I_2 = R$، آن‌گاه $\frac{R}{I \bigcap I_2} \cong \frac{R}{I_1} \times \frac{R}{I_2}$. لذا گزینه (۳) نیز درست است. بنابراین همان‌گونه که اشاره شده گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند. حال ایده‌آل‌های $I_1 = 2\mathbb{Z}$ و $I_2 = 4\mathbb{Z}$ از حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح داریم $(2\mathbb{Z})(4\mathbb{Z}) \subseteq (2\mathbb{Z}) \bigcap (4\mathbb{Z})$ لذا $8\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z}$. اما $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \bigcap 4\mathbb{Z}} \ncong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

مثال۲۱: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت کدام گزینه درست نیست؟

۱) صفر تنها عضو خودتوان رادیکال جیکوبسن R است.

۲) فرض کنید $x \in J(R)$ و به ازای هر عدد صحیح مثبت $n > 2$ اگر $x^n = x$، آن‌گاه $x = 0$.

۳) صفر تنها عضو خودتوان حوزه صحیح R است.

۴) صفر و ۱ تنها عناصر خودتوان حوزه صحیح R هستند.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب متن درس گزینه‌های (۱) و (۲) درست هستند و با توجه به مطالب ارائه شده در فصل حلقه‌ها می‌دانیم صفر و ۱ تنها عناصر خودتوان حوزه صحیح R هستند. بنابراین گزینه (۴) درست است و گزینه (۳) نادرست می‌باشد.

آزمون فصل نهم

۱ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. مجموعه $Nil(R)=\{r\in R \mid \exists n\in\mathbb{N}\,; r^n=0\}$ را در نظر بگیرید. کدام‌یک از موارد زیر از خصوصیات $Nil(R)$ نمی‌باشد؟

۱) $Nil(R)=\bigcap\limits_{P\supseteq I} P$ که در آن P ایده‌آل اول است.

۲) $Nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه R است.

۳) $Nil(R)$ زیرحلقه‌ای از حلقه R است.

۴) $\frac{R}{Nil(R)}$ دارای عضو پوچ‌توان است.

۲ـ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت هر ایده‌آل اول R، ماکسیمال است اگر:

۱) R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد.

۲) R یک حلقه منظم باشد.

۳) R یک حلقه بولی باشد، یعنی به ازای هر $x\in R$، $x^2=x$.

۴) هر سه مورد صحیح است.

۳ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و P یک ایده‌آل اول حلقه R باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) P یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۲) اگر $x\in R$ و $x^n=x$ باشد، آن‌گاه P یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۳) $\frac{R}{P}$ فاقد مقسوم‌علیه صفر است.

۴) اگر $\frac{R}{P}$ یک حلقه متناهی باشد، آنگاه P یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۴ـ تعداد همریختی‌های $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_8$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

۵ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت کدام گزینه درست نمی‌باشد؟

۱) صفر تنها عضو خودتوان حوزه صحیح R است.

۲) صفر تنها عضو خودتوان رادیکال جیکوبسن R است.

۳) فرض کنید $x\in J(R)$. به ازای هر عدد صحیح مثبت $n>2$ اگر $x^n=x$، آن‌گاه $x=0$.

۴) صفر و ۱ تنها عناصر خودتوان حوزه صحیح R هستند.

۶ـ حلقه $\frac{2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ با کدام‌یک از حلقه‌های زیر یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_3$ ۲) $2\mathbb{Z}$ ۳) $3\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}_2$

۷ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار نامتناهی باشد. اگر به ازای هر ایده‌آل ناصفر I از حلقه R، حلقه $\frac{R}{I}$ متناهی باشد، مشخصه حلقه R کدام است؟

۱) نامتناهی ۲) صفر ۳) عددی اول ۴) عددی اول یا صفر

۸ـ فرض کنید R یک حلقه و $f:R\to R$ همریختی حلقه‌ای باشد. کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) $\ker f$ ایده‌آل R است.

۲) $\operatorname{Im} f$ زیرحلقه‌ای از R است.

۳) $R=\ker f\oplus f(R)$

۴) اگر $f^2=f$ باشد، آن‌گاه $R=\ker f\oplus f(R)$

۹ـ فرض کنید F یک میدان، R یک حلقه و $f:F\to R$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت:

۱) $\ker f\neq\{0\}$ ۲) $\ker f=F$ ۳) $\ker f=\{0\}$ یا $\ker f=F$ ۴) $\ker f\trianglelefteq R$

۱۰ـ فرض کنید R و S دو حلقه جابه‌جایی یکدار باشند. اگر $f:R\to S$ همریختی پوشا باشد، کدام‌یک از موارد زیر برقرار نیست؟

۱) S میدان است اگر و تنها اگر $\ker f$ یک ایده‌آل ماکسیمال باشد.

۲) S حوزه صحیح است اگر و تنها اگر $\ker f$ یک ایده‌آل اول باشد.

۳) اگر P ایده‌آل ماکسیمال S باشد، آن‌گاه $f^{-1}(P)$ ایده‌آل ماکسیمال R است.

۴) اگر P ایده‌آل اول S باشد، آن‌گاه $f^{-1}(P)$ ایده‌آل اول R است.

۱۱ـ تعداد درون ریختی‌های حلقه $\mathbb{R}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌نهایت

۱۲ـ ایده‌آل‌های حلقه $\mathbb{Z}_{10}$ کدام‌اند؟

۱) $\mathbb{Z}_{10}$ ۲) $\mathbb{Z}_{10}$ و $\mathbb{Z}_2$ ۳) $\mathbb{Z}_{10}$، $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_5$ ۴) $\mathbb{Z}_{10}$، $\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_5$ و $\mathbb{Z}$

۱۳ـ مشخصه حلقه $\dfrac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}\times 4\mathbb{Z}\times 8\mathbb{Z}}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۶

۱۴ـ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه جابه‌جایی یکدار R و $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقه R باشد، در این صورت:

۱) اگر $I \subseteq Nil(R)$ و $a+I$ از حلقه $\dfrac{R}{I}$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه a وارون‌پذیر است.

۲) اگر $I \subseteq J(R)$، آن‌گاه عضو $a+I$ از حلقه $\dfrac{R}{I}$ وارون‌پذیر است.

۳) $J(R) \subseteq Nil(R)$

۴) $J(R) = Nil(R)$

۱۵ـ فرض کنید R و S دو حلقه و $f: R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر R یک حلقه یکدار باشد، آن‌گاه $f(1_R)$ یکه‌ی حلقه S است.

۲) اگر R حلقه یکدار و S یک حوزه صحیح باشد به طوری که $\ker f \neq R$، آن‌گاه $f(1_R)$ یکه‌ی حلقه S است.

۳) اگر R حلقه یکدار و f همریختی پوشا باشد، آن‌گاه $f(1_R)$ یکه‌ی حلقه S است.

۴) اگر R یک حوزه ایده‌آل اصلی و S یک حوزه صحیح باشد به طوری که f یک به یک نباشد، آن‌گاه مشخصه S عددی اول است.

۱۶ـ حلقه $\mathbb{Z}_9$ را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه برقرار است؟

۱) $\dfrac{\mathbb{Z}_9}{3\mathbb{Z}_9} \cong \mathbb{Z}_9$ ۲) $\dfrac{\mathbb{Z}_9}{3\mathbb{Z}_9} \cong \mathbb{Z}_3$ ۳) $\dfrac{\mathbb{Z}_9}{9\mathbb{Z}_9} \cong \mathbb{Z}_9$ ۴) $\dfrac{\mathbb{Z}_3}{9\mathbb{Z}_3} \cong \mathbb{Z}_9$

۱۷ـ حلقه $\dfrac{\mathbb{Z}_{18}}{3\mathbb{Z}_{18}}$ را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\dfrac{\mathbb{Z}_{18}}{3\mathbb{Z}_{18}}$ یک میدان است.

۲) $3\mathbb{Z}_{18}$ یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۳) $\dfrac{\mathbb{Z}_{18}}{3\mathbb{Z}_{18}} \cong \mathbb{Z}_3$

۴) $\dfrac{\mathbb{Z}_{18}}{3\mathbb{Z}_{18}} \cong \mathbb{Z}_6$

۱۸ـ فرض کنید $\mathbb{Z}$ یک حلقه، m و n اعداد صحیح مثبت باشند. در این صورت کدام گزینه همواره برقرار نمی‌باشد؟

۱) اگر $n,m \geq 1$ آن‌گاه $\dfrac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}\oplus m\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$

۲) اگر $\gcd(n,m)=1$ آن‌گاه $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{nm}$

۳) اگر $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ با ضابطه $f(x) = (\bar{a}, \bar{b})$; $\forall x \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه $\ker f = nm\mathbb{Z}$

۴) اگر $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ آن‌گاه $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}} \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$

۱۹ـ کدام‌یک از ایده‌آل‌های زیر ایده‌آل اول حلقه $\mathbb{Z}_{120}$ می‌باشد؟

۱) $2\mathbb{Z}_{120}$ ۲) $2\mathbb{Z}_3$ ۳) $2\mathbb{Z}$ ۴) $2\mathbb{Z}_{120} \times 5\mathbb{Z}_{120} \times 3\mathbb{Z}_{120}$

۲۰ـ کدام‌یک از ایده‌آل‌های زیر ایده‌آل اول حلقه $\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_{40}$ نمی‌باشد؟

۱) $2\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_{40}$ ۲) $2\mathbb{Z}_{32} \oplus 2\mathbb{Z}_{40}$ ۳) $\mathbb{Z}_{32} \oplus 2\mathbb{Z}_{40}$ ۴) $\mathbb{Z}_{32} \oplus 5\mathbb{Z}_{40}$

فصل دهم

«میدان کسرها و حلقه چندجمله‌ای‌ها»

تست‌های تألیفی فصل دهم

مثال ۱: کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر میدان با میدان کسرهای گویای خود یکریخت است.

۲) هر میدان دارای زیرمیدان اول منحصر به فرد است.

۳) اگر F یک میدان اول باشد و $\mathrm{Char}(F)=0$، آن‌گاه $F \cong \mathbb{Q}$.

۴) اگر F میدان اول باشد، آن‌گاه F با میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$ یا میدان $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) با توجه به خصوصیات میدان کسرها همگی درست هستند ولی در گزینه (۴) با توجه به این که، اگر F میدان اول باشد، آن‌گاه F با میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$ یا میدان $\mathbb{Z}_p$ که p عدد اول است، یکریخت است. از طرفی $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست. چون دارای ضربی نمی‌باشد، بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

مثال ۲: فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $R[x]$ و $R'[x]$ یکریخت باشند، آن‌گاه R و R' یکریخت‌اند.

۲) اگر $R[x]$ فاقد مقسوم علیه صفر غیربدیهی باشد، آن‌گاه R نیز فاقد مقسوم علیه صفر غیربدیهی است.

۳) اگر R میدان باشد، آن‌گاه $R[x]$ یک میدان است.

۴) حلقه R را می‌توان در $R[x]$ نشاند.

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) با توجه ویژگی‌های حلقه‌های چندجمله‌ای درست نمی‌باشند و تنها گزینه (۴) صحیح است. یعنی حلقه R را می‌توان در حلقه یکدار $R[x]$ نشاند.

مثال ۳: فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است.

۱) اگر I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آلی از $R[x]$ است.

۲) اگر R فاقد مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{Char}(R)=\mathrm{Char}(R[x])$.

۳) اگر R حوزه صحیح باشد. آن‌گاه $R[x]$ حوزه صحیح است.

۴) اگر R دارای مقسوم علیه صفر نباشد، آن‌گاه $R[x]$ دارای مقسوم علیه صفر است.

پاسخ: گزینه «۴» اگر I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آلی از $R[x]$ است. لذا گزینه (۱) درست است. اگر R فاقد مقسوم علیه صفر غیر بدیهی باشد، آن‌گاه R حوزه صحیح است و در نتیجه $R[x]$ نیز حوزه صحیح و $\mathrm{Char}(R)=\mathrm{Char}R[x]$ می‌باشد. لذا گزینه‌های (۲) و (۳) درست هستند. ولی گزینه (۴) نادرست است. زیرا اگر R فاقد مقسوم علیه صفر غیربدیهی باشد، آن‌گاه $R[x]$ فاقد مقسوم علیه صفر غیربدیهی است. پس گزینه (۴) نادرست است.

مثال ۴: چندجمله‌ای $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ که در آن p عدد اول است، را در نظر بگیرید. در این صورت نشان دهید هر عضو میدان $\mathbb{Z}_p$ ریشه چندجمله‌ای مخالف صفر $x^p - x$ است.

پاسخ: حلقه $(\mathbb{Z}_p,+,.)$ با قانون ضرب تشکیل یک گروه دوری از مرتبه $p-1$ می‌دهد. بنابراین به ازای هر $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$ داریم $a^{p-1}=1$ یا $a^p=a$. همچنین رابطه $a^p=a$ به ازای هر $a=0$ نیز برقرار است. بنابراین هر عضو میدان $\mathbb{Z}_p$ ریشه چندجمله‌ای x^p-x می‌باشد.

مثال۵: فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر R یک حوزه صحیح و $f \in R[x]$ یک چندجمله‌ای غیر صفر درجه n باشد، آن‌گاه f حداکثر $n+1$ ریشه متمایز دارد.

۲) اگر R حوزه صحیح و $f \in R[x]$ یک چندجمله‌ای غیر صفر درجه n باشد، آن‌گاه f حداکثر n ریشه متمایز دارد.

۳) اگر $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط و $f \in \mathbb{C}[x]$ یک چندجمله‌ای با درجه مثبت باشد، آن‌گاه f حداقل یک ریشه در $\mathbb{C}$ دارد.

۴) اگر $\mathbb{C}$ میدان مختلط و $f \in \mathbb{C}[x]$ یک چندجمله‌ای با درجه مثبت باشد، آن‌گاه f را می‌توان به عوامل درجه اول تجزیه نمود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) درست هستند. اما گزینه (۱) نادرست است. زیرا اگر R یک حوزه صحیح باشد و $f \in R[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر درجه n باشد، آن‌گاه f حداکثر دارای n ریشه متمایز است.

مثال۶: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت کدام گزینه برقرار نیست؟

۱) $\frac{R[x]}{I[x]} \cong \frac{R}{I}[x]$

۲) اگر I اول باشد، آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آل اول است.

۳) $I[x]$ ماکسیمال است.

۴) اگر $R[x]$ یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه R یک میدان است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، آن‌گاه $\frac{R[x]}{I[x]} \cong \frac{R}{I}[x]$، اگر I اول باشد، آن‌گاه $I[x]$ اول است و اگر $R[x]$ حوزه ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه R یک میدان است. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند. ولی اگر $I[x]$ نیز ایده‌آل ماکسیمال باشد، در این صورت $\frac{R[x]}{I[x]}$ یک میدان است و در نتیجه $\frac{R}{I}[x]$ نیز یک میدان می‌باشد، که این تناقض است. زیرا اگر R یک میدان باشد، آن‌گاه $R[x]$ الزاماً یک میدان نیست. پس گزینه (۳) نادرست است.

مثال۷: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\frac{R[x]}{I[x]} \cong \frac{R}{I}[x]$

۲) $\frac{R[x]}{\langle x \rangle} \cong R$

۳) اگر R حوزه صحیح باشد، آن‌گاه $R[x]$ حوزه صحیح است.

۴) اگر R میدان باشد، آن‌گاه $R[x]$ میدان است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر R میدان باشد، الزاماً $R[x]$ میدان نیست، پس گزینه (۴) نادرست است. اما گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) با توجه به مطالب ارائه شده در متن درس درست هستند.

مثال۸: فرض کنید $f(x) = x^{2} + x + 1$ و $g(x) = x + 1$ در این صورت:

۱) $\gcd(f(x), g(x)) = 1$

۲) $\gcd(f(x), g(x)) = x - 1$

۳) $\gcd(f(x), g(x)) = 0$

۴) $\gcd(f(x), g(x)) = x + 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این‌که $f(x) = x^{2} + x + 1$ و $g(x) = x + 1$، لذا چندجمله‌ای‌های $h(x) = -x$ و $r(x) = 1$ موجودند به طوری که $r(x)f(x) + h(x)g(x) = x^{2} + x + 1 + (-x)(x+1) = 1$. بنابراین $\gcd(f(x), g(x)) = 1$.

مثال۹: فرض کنید $f(x) = x^{5} + 2x^{4} + 2x^{3} + 2x^{2} - 2x$ و $g(x) = 2x^{4} + 5x^{3} + 3x^{2} + x$ چندجمله‌ای‌هایی از $\mathbb{R}[x]$ باشند، در این صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $f(x)$ و $g(x)$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** ابتدا با توجه به الگوریتم تقسیم برای چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$f(x) = x^{5} + 2x^{4} + 2x^{3} + 2x^{2} - 2x = (x-1)(x+1)^{2}(x^{2} + 2x)$$

$$g(x) = 2x^{4} + 5x^{3} + 3x^{2} + x = (x+2)(x-1)(x+1)(2x+1)$$

حال با توجه به نتیجه‌ی قبل، نتیجه می‌شود $\gcd(f(x), g(x)) = (x-1)(x+1) = x^{2} - 1$.

مثال۱۰: فرض کنید $f(x)=2x^2-\frac{1}{2}$ و $g(x)=2x^2-3x+1$، چندجمله‌ای‌های روی $\mathbb{Q}[x]$ باشند. در این صورت $\gcd(f(x),g(x))$ برابر است با:

۱) $x+\frac{1}{2}$ ۲) $x-\frac{1}{2}$ ۳) $2x-3$ ۴) $x-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ بفرم $f(x)=2x^2-\frac{1}{2}=2(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$ و $g(x)=2x^2-3x+1=2(x-1)(x-\frac{1}{2})$ هستند. بنابراین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $f(x)$ و $g(x)$ برابر است با:

$$\gcd(2x^2-\frac{1}{2},2x^2-3x+1)=x-\frac{1}{2}$$

مثال۱۱: فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای‌های روی حلقه R باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) چندجمله‌ای‌های $h(x),r(x)\in R$ موجودند به طوری که $\gcd(f(x),g(x))=r(x)f(x)+h(x)g(x)$.

۲) اگر $\gcd(f(x),g(x))=1$، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های $h(x),r(x)\in R$ موجودند به طوری که $r(x)f(x)+h(x)g(x)=1$.

۳) چندجمله‌ای‌های $h(x),r(x)\in R$ موجودند به طوری که $f(x)=h(x)g(x)+r(x)$ که در آن $r(x)=0$ یا $\deg r(x)\le\deg g(x)$.

۴) چندجمله‌ای‌های $h(x),r(x)\in R$ موجودند به طوری که $\gcd(f(x),g(x))=f(x)g(x)+h(x)r(x)$.

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های (۱) و (۲) با توجه به قضایای مربوط به بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک بین چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ درست هستند. گزینه (۳) نیز الگوریتم تقسیم روی حلقه چندجمله‌ای‌ها را بیان می‌کند.

حال در نظر بگیرید $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x-1$ چندجمله‌ای‌هایی از حلقه $\mathbb{Z}$ باشند. در این صورت $h(x)=1$ و $r(x)=-x$ از $\mathbb{Z}$ موجودند. لذا خواهیم داشت $\gcd(f(x),g(x))=x-1$ و $f(x)g(x)+h(x)r(x)=x^3-x^2-2x+1$. بنابراین $\gcd(f(x),g(x))\neq f(x)g(x)+h(x)r(x)$. پس گزینه (۴) نادرست است.

آزمون فصل دهم

۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) فرض کنید D یک حوزه صحیح و F یک میدان باشد، آن‌گاه F' در D نشانده می‌شود.

۲) فرض کنید D یک حوزه صحیح و F میدان کسرهای گویای D باشد، آن‌گاه F' کوچکترین زیرمیدان شامل F است به طوری که $F \cong F'$.

۳) هر میدان با میدان کسرهای گویای خود یکریخت است.

۴) میدان کسرهای حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، میدان $\mathbb{Q}$ است.

۲ـ زیرمیدان‌های اول $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ عبارتند از:

۱) $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ ۲) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Z}_p$ (p عدد اول) و $\mathbb{Q}$ ۴) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$

۳ـ تعداد عناصر وارون‌پذیر حلقه $\mathbb{Z}[X]$ عبارت است از:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

۴ـ کدام حلقه یک میدان است؟

۱) $\frac{\mathbb{Z}_7[X]}{<x^4+x+6>}$ ۲) $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{<x^3+1>}$ ۳) $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{<x^2+1>}$ ۴) $\frac{\mathbb{Z}_3[X]}{<x^3+2x+1>}$

۵ـ هر میدان شامل یک زیرمیدان اول است که با کدام‌یک از میدان‌های زیر یکریخت است؟

۱) میدان کسرهای گویای $\mathbb{Q}$ ۲) با میدان $\mathbb{Z}$

۳) با میدان $\mathbb{Z}_p$ که p عدد اول است. ۴) گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح هستند.

۶ـ فرض کنید R یک حلقه و $R[X]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در R باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $f \in R[X]$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر عناصر $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ پوچ‌توان باشد.

۲) $f \in R[X]$ مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر $0 \neq b \in R$ موجوداست به طوری که $bf = 0$.

۳) $f \in R[X]$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ وارون‌پذیر باشند.

۴) اگر R فاقد عناصر پوچ‌توان باشد، آن‌گاه عضو وارون‌پذیر حلقه $R[X]$ بفرم $f(x) = a$ است.

۷ـ در حلقه $\mathbb{Z}_4[X]$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) چندجمله‌ای $x^2 + x + 2$ تحویل‌پذیر است. ۲) $\frac{\mathbb{Z}_4[X]}{<x^2+x+3>}$ یک میدان است.

۳) چندجمله‌ای $x^2 + x + 2$ تحویل‌ناپذیر است. ۴) $<x^2+x+2>$ یک ایده‌آل اول است.

۸ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی یکدار و $R[X]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در R باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر I ایده‌آل R باشد، آن‌گاه $I[X]$ هم ایده‌آل $R[X]$ است.

۲) اگر P ایده‌آل اول R باشد، آن‌گاه $P[X]$ ایده‌آل اول $R[X]$ است.

۳) اگر M ایده‌آل ماکسیمال حلقه R باشد، آن‌گاه $M[X]$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه $R[X]$ است.

۴) اگر R یک میدان باشد، آن‌گاه $R[X]$ میدان نمی‌باشد.

۹ـ ایده‌آل ماکسیمال حلقه $\mathbb{Z}_2[X_1, X_2]$ کدام است؟

۱) $<X_1, X_2>$ ۲) $<X_1 - X_2>$ ۳) $<X_1 - 1, X_2>$ ۴) $<X_1, X_2 - 1>$

۱۰ـ اگر R یک حلقه باشد، کدام ویژگی از R به $R[X]$ نمی‌رسد؟

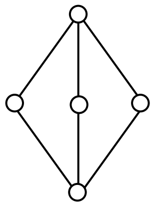
۱) جابه‌جایی بودن ۲) میدان بودن ۳) یکدار بودن ۴) حوزه صحیح بودن

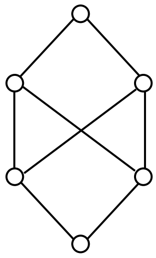
فصل یازدهم

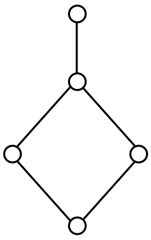
«رسته و مشبکه»

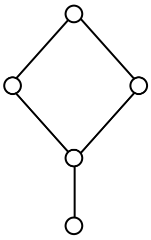
آزمون فصل یازدهم

۱ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر یک مشبکه نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲ـ فرض کنید $(L,\wedge,\vee)$ یک مشبکه باشد. در این صورت کدام‌یک از فاصله‌های زیر یک زیرمشبکه است؟

۱) $\{x\in L \mid a\le x\}=[a,+\infty)$

۲) $\{x\in L \mid x\le a\}=(-\infty,a]$

۳) $\{x\in L \mid a\le x\le b\}=[a,b]$

۴) هر سه مورد زیرمشبکه هستند.

۳ـ فرض کنید $(A,\le)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A,\le)$ یک مشبکه است.

۲) مجموعه تمام توابع بفرم $\{f:A\to A \mid a_1\le a_2 \Rightarrow f(a_1)\le f(a_2)\}$ یک رسته است.

۳) $(A,\wedge,\vee)$ یک مشبکه است.

۴) هر سه مورد صحیح است.

۴ـ فرض کنید ریختار $f:A\to B$ در رسته‌ی $\mathcal{C}$ یک ریختار هم‌ارزی باشد. اگر $g:B\to A$ ریختار دیگری باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $fog=1_B$

۲) $gof=1_A$

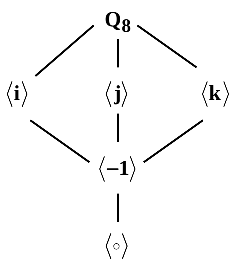
۳) f منحصر بفرد است.

۴) g منحصر بفرد است.

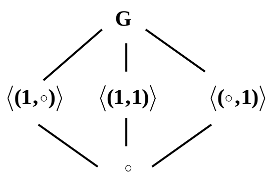
۵ـ کدام‌یک از نمودارهای رسم شده به عنوان زیرگروه مشبکه‌ی گروه مورد نظر، نادرست است؟

۱) 

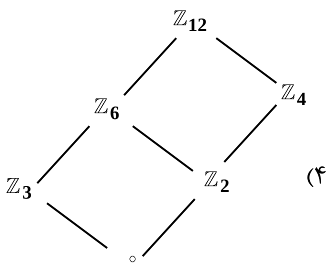
نمودار زیرگروه مشبکه $\mathbb{Z}_8$

۲) 

نمودار زیرگروه مشبکه Q_8

۳) 

نمودار زیرگروه مشبکه $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

۴) 

نمودار زیرگروه مشبکه $\mathbb{Z}_{12}$

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: مقدمات و پیش‌نیازها

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»

فصل دوم: گروه‌ها

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»

فصل سوم: گروه‌های جایگشتی

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل چهارم: زیرگروه‌ها

۱ـ گزینه«۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل پنجم: همریختی گروه‌ها

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»

فصل ششم: حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»

فصل هفتم: حلقه‌ها

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۳»

فصل هشتم: زیرحلقه‌ها و ایده‌آل‌ها

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»

فصل نهم: ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال و همریختی حلقه‌ها

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۲»

فصل دهم: میدان کسرها و حلقه چندجمله‌ای‌ها

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»

فصل یازدهم: رسته و مشبکه

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»

آزمون (۱)

تعداد سئوالات : ۱۰ | **سطح آزمون : (A)** (ساده)

۱ـ فرض کنید R یک حلقه باشد. مجموعه $N(a)=\{r\in R \mid ar=ra\}$ را نرمال‌ساز a در R می‌نامیم، در این صورت:

۱) $N(a)$ زیرحلقه‌ای از R است.
۲) $Z(R)$ زیرحلقه‌ای از $N(a)$ است.
۳) $Z(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.
۴) همه موارد

۲ـ فرض کنید R یک حوزه ایده‌آل اصلی و I ایده‌آل ناصفر از حلقه R باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر I ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه I ماکسیمال است.
۲) اگر I ایده‌آل ماکسیمال باشد، آن‌گاه I اول است.
۳) حلقه $\frac{R}{I}$ یک حوزه ایده‌آل اصلی است.
۴) هر ایده‌آل $\frac{R}{I}$ اصلی است.

۳ـ فرض کنید $f:\mathbb{Z}\to F$ یک همریختی پوشا از حلقه $\mathbb{Z}$ به میدان F باشد، میدان F دارای کدام خصوصیت است؟

۱) F یک حوزه صحیح از مرتبه صفر است.
۲) F یک میدان متناهی از مرتبه عدد اول p است.
۳) F یک میدان از مرتبه عدد اول p است.
۴) F یک حوزه صحیح و $kerf$ یک ایده‌آل اول است.

۴ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر تحت عمل ضرب به پیمانهٔ ۱۵ تشکیل گروه می‌دهند؟

۱) $\{۱,۳,۷\}$
۲) $\{۱,۲,۶\}$
۳) $\{۱,۸\}$
۴) $\{۱,۴\}$

۵ـ اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اگر مرتبهٔ همهٔ اعضای G متناهی باشد، آن‌گاه G متناهی است.
۲) اگر a و b دو عضو G از مرتبهٔ متناهی باشند، آن‌گاه ab از مرتبهٔ متناهی است.
۳) اگر G دوری و یک زیرگروه متناهی غیربدیهی داشته باشد، آن‌گاه G نامتناهی است.
۴) اگر تعداد زیرگروه‌های G متناهی باشد، آن‌گاه G متناهی است.

۶ـ تعداد دورهای مرتبهٔ ۴ در $S_۶$ برابر است با:

۱) ۹۰
۲) ۸۰
۳) ۹۵
۴) ۸۵

۷ـ اگر $n\geq ۳$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد گروه متقارن S_n نادرست است؟

۱) S_n دوری است.
۲) $Z(S_n)=\{e\}$
۳) $S_n=\langle(۱۲),(۱۲...n)\rangle$
۴) S_n ساده نیست.

۸ـ تعداد مولدها و تعداد زیرگروه‌های گروه دوری مرتبهٔ ۲۴ به ترتیب برابر است با:

۱) ۸ و ۸
۲) ۸ و ۲
۳) ۳ و ۸
۴) ۸ و ۲

۹ـ اگر H و K دو زیرگروه از G با شاخص‌های متناهی باشند، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $[H:H\cap K]=[G:K]$
۲) $[G:H\cap K]=[G:H][G:K]$
۳) $[H:H\cap K]=[G:H]$
۴) $[G:H\cap K]\leq[G:H][G:K]$

۱۰ـ اگر G یک گروه باشد و $H,K\leq G$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اگر $H\trianglelefteq G$ و $K\trianglelefteq H$، آن‌گاه $K\trianglelefteq G$.
۲) اگر $H\trianglelefteq G$ و $KCharH$، آن‌گاه $K\trianglelefteq G$.
۳) اگر $HCharG$ و $K\trianglelefteq H$، آن‌گاه $K\trianglelefteq G$.
۴) اگر $H\trianglelefteq G$ آن‌گاه $HCharG$

آزمون (۲)

تعداد سئوالات : ۱۰ **سطح آزمون : (B)** (متوسط)

۱ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، در این صورت:

۱) $a \in R$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a+I$ در $\frac{R}{I}$ وارون‌پذیر باشد.

۲) اگر I ایده‌آلی از R و $I \subseteq Nil(R)$ آن‌گاه $a \in R$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a+I$ در $\frac{R}{I}$ وارون‌پذیر باشد.

۳) اگر I ایده‌آلی از R و $Nil(R) \subseteq I$ آن‌گاه $a \in R$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a+I$ در $\frac{R}{I}$ وارون‌پذیر باشد.

۴) اگر $a+I$ در $\frac{R}{I}$ وارون پذیر باشد، آن‌گاه a در R وارون پذیر است.

۲ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و M تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه R باشد. در این صورت کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

۱) عناصر وارون‌پذیر حلقه R یک ایده‌آل است.

۲) هر عضو R وارون‌پذیر یا پوچ‌توان است.

۳) $\sqrt{0}$ ایده‌آل حلقه R است.

۴) حلقه R دارای اعضای خودتوان نمی‌باشد.

۳ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و $R[x]$ حلقه چند جمله‌ای با ضرایب در R باشد، فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد، در این صورت:

۱) اگر I ایده‌آل اول R باشد، آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آل اول $R[x]$ است.

۲) اگر I ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$ باشد، آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$ است.

۳) اگر R میدان باشد، آن‌گاه $R[x]$ هم میدان است.

۴) اگر I ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آل اول و ماکسیمال حلقه $R[x]$ است.

۴ـ فرض کنید G یک گروه باشد و $a,b \in G$، در این صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $o(ab)=o(a)o(b)$ ۲) $o(a)=o(bab^{-1})$ ۳) $o(ab)=(o(a),o(b))$ ۴) $o(ab)=\frac{o(a)o(b)}{[o(a),o(b)]}$

۵ـ مرتبهٔ جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۲ & ۶ & ۱ \end{pmatrix}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۶ـ اگر N زیرگروه نرمالی از گروه G باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $Z(N) \trianglelefteq Z(G)$ ۲) $Z(N) \trianglelefteq G$ ۳) $Z(G) \cap N=\{e\}$ ۴) $Z(G) \trianglelefteq Z(N)$

۷ـ عکس قضیهٔ لاگرانژ برای کدام‌یک از گروه‌های زیر برقرار نیست؟

۱) گروه متناوب $A_۴$ ۲) گروه گراترنیون $Q_۸$ ۳) گروه متقارن $S_۴$ ۴) گروه‌های دوری

۸ـ اگر G یک گروه باشد و H یک زیرگروه از آن و K زیرگروه نرمالی از آن به طوری که $(o(H),o(\frac{G}{K}))=۱$، آن‌گاه:

۱) $H \trianglelefteq G$ ۲) $H \cup K \leq G$ ۳) $K \leq H$ ۴) $H \cap K=\{e\}$

۹ـ چند همریختی پوشا از یک گروه ۴ عضوی به یک گروه ۱۵ عضوی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱۵

۱۰ـ گروه $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (۵,۷) \rangle}$ با کدام گروه یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_۵ \times \mathbb{Z}_۷$ ۲) $۵\mathbb{Z} \times ۷\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}$

آزمون (۳)

تعداد سئوالات : ۱۰　　**سطح آزمون : (C)** (سخت)

۱ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر a عضو پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $1-a$ وارون‌پذیر است.

۲) I ایده‌آل رادیکال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ دارای هیچ عضو پوچ‌توان مخالف صفر نباشد.

۳) اگر a عضو پوچ‌توان باشد، آن‌گاه a وارون‌پذیر است.

۴) اگر a وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $a+I$ در $\frac{R}{I}$ وارون‌پذیر است.

۲ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، در این صورت کدام گزینه برقرار نیست؟

۱) مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R که با $\text{Max}(R)$ نشان داده می‌شود، ناتهی است.

۲) اگر I ایده‌آل سره حلقه R باشد، آن‌گاه ایده‌آل ماکسیمال M موجود است به طوری‌که $I \supseteq M$.

۳) اگر I ایده‌آل سره حلقه R و M ایده‌آل ماکسیمال حلقه R باشد، آن‌گاه $\frac{M}{I}$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه $\frac{R}{I}$ است.

۴) اگر a عضو وارون‌ناپذیر حلقه R باشد، آن‌گاه ایده‌آل ماکسیمال M موجود است به طوری‌که $a \in M$

۳ـ اگر M یک ایده‌آل سره حلقه بول و یکدار R باشد، آن‌گاه کدام‌یک از نتایج زیر در مورد حلقه R برقرار نمی‌باشد (حلقه R را بول می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in R$، $x^2 = x$)

۱) $\frac{R}{M}$ یک حلقه بول است.

۲) $\frac{R}{M} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\langle 2 \rangle}$

۳) M ایده‌آل ماکسیمال R است.

۴) هر سه مورد روی R برقرار است.

۴ـ فرض کنید G یک گروه باشد و $a \in G$. اگر $o(a^4) = 9$، آن‌گاه $o(a)$ برابر است با:

۱) ۴　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۳۶

۵ـ اگر $(G,*)$ یک نیم گروه باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اگر G عضو همانی راست داشته باشد و هر عضو آن معکوس چپ داشته باشد، آن‌گاه G یک گروه است.

۲) اگر قوانین حذف چپ و راست در G برقرار باشد، آن‌گاه G یک گروه است.

۳) اگر به ازای هر $a,b \in G$، معادلات $a*x=b$ و $y*a=b$ جواب داشته باشد، آن‌گاه G یک گروه است.

۴) اگر G عضو همانی چپ داشته باشد و هر عضو ان معکوس راست داشته باشد، آن‌گاه G یک گروه است.

۶ـ اگر $\varphi: G \to H$ یک همریختی گروه‌ها باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $K \trianglelefteq G$، آن‌گاه $\varphi(K) \trianglelefteq G$

۲) اگر H آبلی باشد، آن‌گاه G آبلی است.

۳) اگر $K \trianglelefteq H$، آن‌گاه $\varphi^{-1}(K) \trianglelefteq H$

۴) اگر G آبلی باشد، آن‌گاه H آبلی است.

۷ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) هر گروه ۸ عضوی با زیرگروهی از S_8 یکریخت است.

۲) $Q_8 \cong D_8$

۳) $\text{Aut}(Q_8) \cong D_8$

۴) $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$

۸ـ کدام‌یک از گروه‌های زیر، زیرگروه ماکسیمال ندارد؟

۱) گروه‌های دوری ۲) $(\mathbb{R},+)$ ۳) $(\mathbb{Z},+)$ ۴) $(\mathbb{R},\cdot)$

۹ـ فرض کنید $\theta=(۳۴)(۱۳۶)$ جایگشتی در $S_۶$ باشد، در این صورت داریم:

۱) $\theta^{۱۵}=(۱۶۴۳)$ ۲) $\theta^{۱۵}=(۴۳)(۶۳۱)$ ۳) $\theta^{۱۵}=\theta$ ۴) $\theta^{۱۵}=(۱۳۴۶)$

۱۰ـ اگر G یک گروه باشد و $N\trianglelefteq G$، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر G آبلی باشد، آن‌گاه $\frac{G}{N}$ آبلی است.

۲) اگر G دوری باشد، آن‌گاه $\frac{G}{N}$ دوری است.

۳) اگر $\frac{G}{N}$ دوری باشد، آن‌گاه G دوری است

۴) اگر N و $\frac{G}{N}$ متناهی مولد باشد، آن‌گاه G متناهی مولد است.

پاسخنامه آزمونهای خودسنجی
«مبانی جبر»

آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»

آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»

آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»