CHAPTER ONE

((Mathematical Principles))

Theorem

If the square of one side of a triangle is equal to the sum of the squares of the other sides then the triangle is a right triangle.

قضیه

اگر مربع یک ضلع از یک مثلث برابر مجموع مربعات اضلاع دیگر باشد آنگاه آن مثلث، قائم‌الزاویه است.

Theorem: If the square of the longest side of a triangle is greater than the sum of the squares of the other two sides then the triangle is an **obtuse triangle**.

قضیه: اگر مربع بلندترین ضلع یک مثلث از مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن بزرگتر باشد آنگاه آن مثلث یک **مثلث منفرجه** است.

Theorem: If the square of the longest side of a triangle is less than the sum of the squares of the other two sides then the triangle is an **acute triangle**.

قضیه: اگر مربع بزرگترین ضلع یک مثلث کوچکتر از مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد آنگاه آن مثلث یک **مثلث حاده** است.

The Pythagorean Theorem: In a right triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the legs.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

قضیه فیثاغورث. در یک مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر مجموع مربعات اضلاع قائم است.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Definition of an inductive set

A set of real numbers is called an **inductive set** if it has the following two properties:

a) The number 1 is in the set. b) For every x in the set, the number $x+1$ is also in the set

For example, $\mathbb{R}$ is an inductive set, So $\mathbb{N}$ is an inductive set.

تعریف مجموعه استقرایی

یک مجموعه از اعداد حقیقی، **مجموعه استقرایی** نام دارد اگر دو ویژگی زیر را داشته باشد:

الف) عدد ۱ در مجموعه باشد. ب) برای هر x در مجموعه، $x+1$ نیز در مجموعه باشد.

مثلاً، $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) یک مجموعه استقرایی است. بنابراین $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) نیز یک مجموعه استقرایی است.

The Language of Mathematics

There are several words on our everyday language which are also used on mathematics. Words like **true, false, not, and, or, implies, if and only if, all, some, none**, etc, are all everyday words that are essential to the mathematician's formal language. Most of us feel that we know the meanings of these words. In order to be sure that we all attach the same meaning to these words we will attempt to define some of them precisely. You will find that the clarification of some of the above-mentioned words will make your study of mathematics more precise, and we hope clearer and more enjoyable. For example, we hope to simplify later discussions concerning inequalities by the use of the notions developed in this chapter.

The basic building blocks of mathematical statements are sentences which are either true or false. We call such sentences **prpositions.**

زبان ریاضی

در زبان روزمره‌ی ما چندین واژه هست که در ریاضیات هم استفاده می‌شود. کلماتی همچون **درست، غلط، نقیض، و، یا، دلالت می‌کند، اگر و فقط اگر، همه، برخی، هیچ‌یک** و .... همگی کلمات روزمره‌ای هستند که برای زبان رسمی ریاضیدانان، اساسی هستند. بیشتر ما احساس می‌کنیم که معنی این کلمات را می‌دانیم. به منظور این که مطمئن شویم همگی معنای یکسانی را به این واژگان نسبت می‌دهیم، تلاش خواهیم کرد برخی از آن‌ها را به دقت تعریف کنیم.
شما درخواهید یافت که شفاف کردن برخی از کلمات فوق، مطالعه ریاضی را برای شما دقیق‌تر، واضح‌تر و لذت‌بخش‌تر خواهد کرد. مثلاً، امیدواریم مباحث بعدی که مرتبط با نامساوی‌ها است، با کمک مفاهیمی که در این فصل گسترش یافته‌اند، ساده‌سازی شوند. عناصر اصلی سازنده‌ی عبارات ریاضی، جملاتی هستند که یا درست هستند یا غلط. ما این جملات را **گزاره** می‌نامیم.

Most theorems in mathematics involve something more than simple propositions and connectives of the type we have been discussing. For example, probably you have frequently seen a statement similar to the following:

$$a+b=b+a$$

Where a and b are natural numbers (that is, 1 , 2, 3, ...). We do not mean to say that $a+b=b+a$ for a particular of numbers a and b, but that $a+b=b+a$ for any pair of natural numbers at all. We usually indicate this by saying that for all natural numbers a and b, $a+b=b+a$

The word **all** or **for all** is called the **universal quantifier**. Frequently the reader of mathematics is expected to provide the universal quantifier himself. The authors will just assume that the reader will do this.

بیشتر قضایا در ریاضیات، شامل چیزی بیش از گزاره‌های ساده و رابط‌ها از نوعی که بحث کرده‌ایم، می‌باشند. مثلاً، احتمالاً شما به طور مکرر عبارتی شبیه به این دیده‌اید:

$$a+b=b+a$$

که در آن a و b اعداد طبیعی هستند (یعنی ۱، ۲، ۳، ....). ما قصد نداریم بگوییم $a+b=b+a$ برای اعداد خاص a و b برقرار است، بلکه می‌گوییم $a+b=b+a$ برای هر جفت از اعداد طبیعی برقرار است. معمولاً این را با گفتن این که به ازای همه اعداد طبیعی a و b ،

$$a+b=b+a$$

خاطرنشان می‌کنیم.

واژه **همه** یا **به ازای هر**، **سور عمومی** نامیده می‌شود. به طور مکرر از خواننده‌ی ریاضی انتظار می‌رود خود سور عمومی را به کار برد. مؤلفین فرض می‌کنند، خواننده خودش این کار را انجام می‌دهد.

You were to interpret $p \wedge q = q \wedge p$

to mean that $p \wedge q = q \wedge p$ for all propositions. In fact the choice of the letters was arbitrary. If r and s are propositions, then we know from the above that $r \wedge s = s \wedge r$. Furthermore

$$(x<5) \wedge (x>3) = (x>3) \wedge (x<5).$$

In general, $p \wedge q = q \wedge p$ for any propositions p and q.

شما می‌بایست $p \wedge q = q \wedge p$

را به این صورت تفسیر می‌کردید که به ازای همه‌ی گزاره‌ها $p \wedge q = q \wedge p$. در واقع انتخاب حروف دلخواه بود. اگر r و s گزاره باشند، آنگاه از مطالب فوق می‌دانیم که $r \wedge s = s \wedge r$. علاوه براین

$$(x<5) \wedge (x>3) = (x>3) \wedge (x<5).$$

در حالت کلی، $p \wedge q = q \wedge p$ برای هر دو گزاره‌ی p و q برقرار است.

The other quantifier frequently used in mathematics is the **existential quantifier**, "**there exists**". For example, if we are talking about natural numbers again there exists a natural number less than 4 that divides 12 evenly. That is, there is at least one natural number less than 4 that divides 12 evenly – there may be more. To say there exists is to assert that there is at least one. Symbols which we will use occasionally for the universal quantifier and the existential quantifier are $\forall$ and $\exists$ respectively. For example,

$$\forall x \quad x^2 \geq 0 \text{ mean for all } x, x^2 \geq 0$$

$$\text{and } \exists x \quad x^2 = 0 \text{ means there exists an } x \text{ such that } x^2 = 0.$$

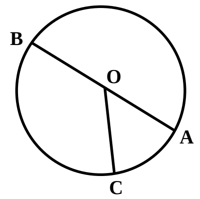
سور دیگری که به طور مکرر در ریاضیات استفاده می‌شود، **سور وجودی** است، «**وجود دارد**». مثلاً اگر درباره اعداد طبیعی صحبت می‌کنیم، مجدداً عدد طبیعی کمتر از ۴ وجود دارد که ۱۲ را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کند، یعنی اینکه حداقل یک عدد طبیعی کمتر از ۴ وجود دارد که ۱۲ را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کند (شاید بیش از یکی پیدا شود). گفتن «وجود دارد» تأکید بر این است که حداقل یکی وجود دارد. نمادهایی که بعضی اوقات برای سور عمومی و سور وجودی به کار خواهیم برد به ترتیب $\forall$ و $\exists$ هستند. مثلاً

$\forall x \quad x^{۲} \geq ۰$ یعنی به ازای هر x ، $x^{۲} \geq ۰$

و $\exists x \quad x^{۲} = ۰$ یک x وجود دارد به طوری که $x^{۲} = ۰$

Circles

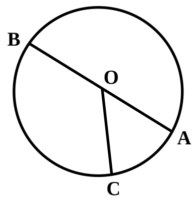
1- Did you ever skip a stone over the surface of the water and watch the circles appear?
Circles occur frequently in nature. Name some of the natural things you have seen that contain circles.
On the next page you will learn how to divide a circle into six equal parts, and later you will learn how to divide a circle into twelve equal parts.



2- In the circle at the right, the center is at O.
3- There are three radius in this circle. Name them.
4- Which is a diameter, AB or OC?
5- If OC is 2", how long is AB?

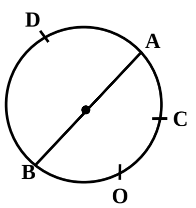
دایره‌ها

۱ـ آیا تا به حال یک سنگ را روی سطح آب پرتاب کرده‌اید و دایره‌هایی را که ظاهر می‌شوند دیده‌اید؟
دایره‌ها به طور مکرر در طبیعت رخ می‌دهند. برخی از اشیاء طبیعی شامل دایره‌ها را که دیده‌اید نام ببرید.
در صفحه بعدی شما یاد خواهید گرفت چگونه یک دایره را به شش قسمت مساوی تقسیم کنید، و بعد یاد خواهید گرفت چگونه دایره را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم کنید.



۲ـ در دایره سمت راست ، مرکز در نقطه O است.
۳ـ در این دایره سه شعاع وجود دارد ـ آن‌ها را نام ببرید.
۴ـ قطر کدام است؟ AB یا OC؟
۵ـ اگر OC برابر۲ باشد، طول AB چقدر است؟

6- Place a point on a piece of paper and call it O. Whit O as center and a radius of 1 inch draw a circle. With the same center and a radius of 2 inches, draw another circle. These two circles are concentric circles; they have the same center.
7- Any part of the curved of a circle, such as AC, CB, or ACB, in the circle at the right, is an **arc**. The length of the circle is its **circumference**. If AB is a **diameter**, which of the following arcs is a semicircle (half a circle)? CAD ACB، DBC.



۶ـ نقطه‌ای روی یک تکه کاغذ قرار دهید و آن را O بنامید. به وسیله O به عنوان مرکز و شعاع ۱ اینچ یک دایره رسم کنید. با همان مرکز و شعاع ۲ اینچ دایره دیگری رسم کنید. این دو دایره، دایره‌های هم‌مرکز هستند؛ آن‌ها مرکز یکسانی دارند.
۷ـ هر قسمت از منحنی یک دایره، مثل AC، CB یا ACB در دایره سمت راست یک **قوس یا کمان** نام دارد. طول دایره **محیط** آن است. اگر AB یک **قطر** باشد، کدام یک از کمان‌های زیر یک نیم‌دایره (نصف یک دایره) است؟ CAD، ACB، DBC.

Trigonometric Functions

From the definitions of the trigonometric functions one easily **deduce** the following formulas:

1) $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$ $(\text{if} \tan t \neq 0)$, 2) $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ $(\text{if} \cos t \neq 0)$, 3) $\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$ $(\text{if} \sin t \neq 0)$,

Vocabulary

Absolute value **قدر مطلق**

Example: The absolute value of -3 is denoted by |-3| and is equal to 3.

قدر مطلق ۳- با |۳-| نمایش داده می‌شود و برابر ۳ است.

Addition **جمع**

Algebraic equation **معادله جبری**

Angle **زاویه**

Example: Every square or rectangle has four square corners, or right angles, which look like this: ┘ ┐ ┌ └

هر مربع یا مستطیل دارای چهار گوشه مربعی یا زاویه قائم مانند: └ ┌ ┐ ┘ می‌باشد.

Antisymmetric **پادمتقارن**

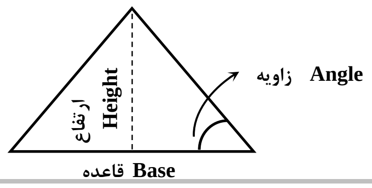
Example: There are relations which are both symmetric and antisymmetric (equality and the empty relation), there are relations which are neither symmetric nor antisymmetric, there are relations which are symmetric and not antisymmetric (congruence modulo *n*), and there are relations which are not symmetric but are antisymmetric ("is less than or equal to").

روابطی هستند که هم متقارن و هم پادمتقارن هستند (تساوی و رابطه تهی)، روابطی هستند که نه متقارن هستند نه پادمتقارن، روابطی هستند که متقارن هستند ولی پادمتقارن نیستند (همنهشت به پیمانه n) و روابطی هست که متقارن نیستند ولی پادمتقارن هستند («کمتر یا مساوی است با»)

Area **مساحت**

Example: Area of triangle = $\frac{1}{2} \times \textbf{base} \times \textbf{height}$

ارتفاع × قاعده × $\frac{۱}{۲}$ = مساحت مثلث



Associative operation **عمل شرکت‌پذیر**

Example: Union is an associative operation because $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

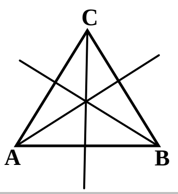
اجتماع عملی شرکت‌پذیر است زیرا $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$.

Axis **محور**

Axis of symmetry **محور تقارن**

Example: An equilateral triangle has three axis of symmetry.

یک مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای سه محور تقارن است.



Base **قاعده، پایه، مبنا**

Example: The side on which a triangle stands is its base.

ضلعی که مثلث روی آن می‌ایستد قاعده‌ی آن است.

Cancellation **ساده کردن، حذف کردن**

Example: Cancellation means dividing the numerator and the denominator by the same number.

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}}{{}_{2}\cancel{4}} \times \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}} = \frac{1\times1}{2\times1} = \frac{1}{2}$$

ساده کردن یعنی صورت و مخرج کسر را بر عدد یکسانی تقسیم کنیم.

Cancellation law **قانون حذف**

Example: Cancellation law for addition: if $a+b=a+c$ then $b=c$

قانون حذف برای جمع : اگر $a+b=a+c$ آنگاه $b=c$.

Example: Cancellation law for multiplication: if $\mathbf{ab=ac}$ and $\mathbf{a\neq 0}$ then $\mathbf{b=c}$.

قانون حذف برای ضرب: اگر $ab=ac$ و $a\neq ۰$ آنگاه $b=c$.

Circumference **محیط دایره**

Example: The length of distance around a circle

طول مسافت دور یک دایره.

Coefficient **ضریب**

Commutative operation **عمل تعویض‌پذیر یا عمل جابجایی**

Example: Since is no question of order involved in the definition of union and intersection, it follows that $\mathbf{A\cup B=B\cup A}$ and $\mathbf{A\cap B=B\cap A}$, that is to say union and intersection are commutative operations.

چون در تعریف‌های اجتماع و اشتراک ترتیب دخالت ندارد، نتیجه می‌شود که $A\cup B=B\cup A$ و $A\cap B=B\cap A$ یعنی اجتماع و اشتراک اعمالی تعویض‌پذیرند.

Complements **متمم**

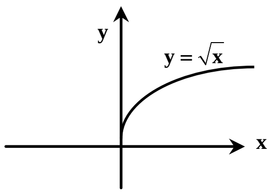
Composite function **تابع مرکب**

Example: For a composition of functions (gof) to be possible, the range of the first function (f) must be a subset of the domain of the second function (g)

برای اینکه ترکیب دو تابع (gof) ممکن باشد، برد تابع اول (f) بایستی زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی تابع دوم (g) باشد.

Concave **کاو ـ مقعّر**

Example: He function $\mathbf{y=\sqrt{x}}$ is concave.



تابع $y=\sqrt{x}$ مقعّر است.

Consist of **تشکیل شده از**

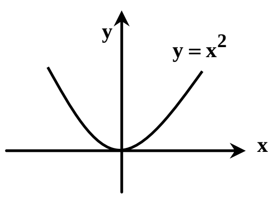
Contradiction **تناقض**

Example: Proof by contradiction is a particular kind of the more general form of argument known as reductio ad absurdum.

اثبات با استفاده از تناقض حالت خاصی از شکلی کلی‌تر از بحث به نام برهان خلف است.

Convex **کوژ ـ محدّب**

Example: The function $\mathbf{y=x^2}$ is convex.



تابع $y=x^۲$ محدّب است.

Corner **گوشه**

Denominator **مخرج کسر**

CHAPTER THREE
((Differential Equations))

Integral curves and direction fields

Consider a differential equation of first order, say $y' = f(x, y)$ and suppose some of the solutions satisfy an implicit relation of the form

$$F(x, y, C) = 0$$

where C denotes a constant.
If we introduce a **rectangular coordinate system** and plot all the points (x, y) whose coordinates satisfy for a particular C, we obtain a curve called an integral curve of the differential equation.

منحنی‌های انتگرال و میدان‌های جهت

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مثلاً $y' = f(x, y)$، را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم جواب‌هایی از آن در یک رابطه ضمنی به شکل

$$F(x, y, C) = ۰$$

که در آن C یک ثابت است، صدق می‌کنند.

چنانچه **دستگاه مختصات قائمی** را رسم کرده و کلیه نقاط (x, y) را که مختصات آنها به ازای یک C خاص صدق می‌کنند رسم کنیم یک منحنی به دست می‌آید که آن را منحنی انتگرال معادله دیفرانسیل می‌نامند.

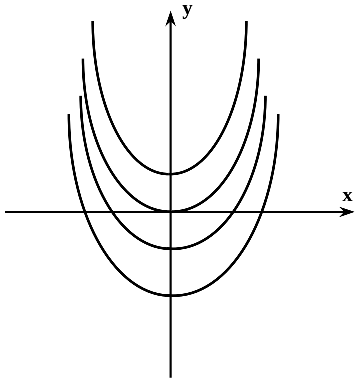
Different values of C usually give different integral curves, but all of them share a common geometric property. The differential equation $y' = f(x, y)$ relates the slope y' at point (x, y) of the curve to the coordinates x and y. As C takes on all its values, the collection of integral curves obtained is called a one – parameter family of curves.

مقادیر مختلف C معمولاً منحنی‌های انتگرال متفاوتی را به دست می‌دهند، اما همه آن‌ها از خاصیت هندسی مشترکی برخوردارند. معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$، شیب y' را در هر نقطه (x, y) از منحنی ، به مختصات x و y مربوط می‌کند. وقتی C همه مقادیرش را اختیار کند دسته‌ی منحنی‌های انتگرال حاصل، یک خانواده‌ی یک‌پارامتری از منحنی‌ها نامیده خواهد شد.

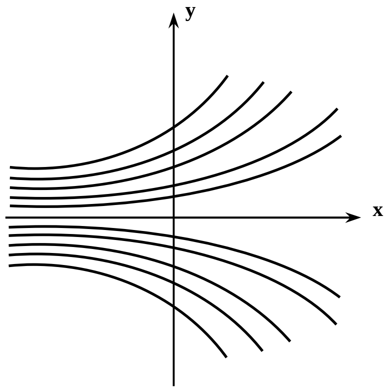
For example, when the differential equation is $y' = 3$, integration gives us $y = 3x + C$, and the integral curves form a family of straight lines, all having slope 3. The arbitrary constant C represents the **y-intercept** of these lines.

به عنوان مثال وقتی معادله دیفرانسیل $y' = ۳$ باشد، با انتگرال‌گیری خواهیم داشت $y = ۳x + C$ و منحنی‌های انتگرال، خانواده‌ای از خطوط مستقیم را تشکیل می‌دهند که همه دارای شیب ۳ هستند. ثابت دلخواه C نمایش **عرض از مبدأ** این خطوط می‌باشد.

If the differential equation is $y' = x$, integration yields $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, and the integral curves form a family of parabolas as shown in Figure (1) Again, the constant C tells us where the various curves cross the y-axis. Figure illustrates the family of **exponential curves**, $y = Ce^x$, which are integral curves of the differential equation $y' = y$. Once more, C represents the y-intercept. In this case, C is equal to the slope the curve at the point where it crosses the y-axis.

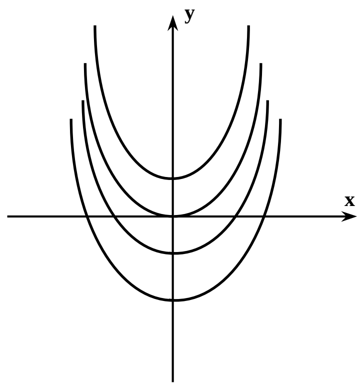


1- Integral curves of the differential equation $y' = x$

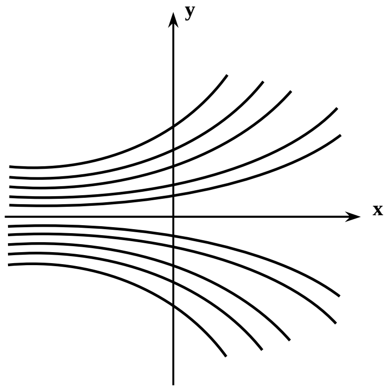


2- Integral curves of the differential equation $y' = y$

چنانچه معادله دیفرانسیل $y' = x$ باشد انتگرال‌گیری $y = \frac{۱}{۲}x^{۲} + C$ را نتیجه می‌دهد و منحنی‌های انتگرال خانواده‌ای از سهمی‌ها را تشکیل خواهند داد کـه در شکل(۱) نموده شده‌اند. مجدداً ثابت C به ما می‌گوید که منحنی‌های مختلف از کجای محور y می‌گذرند. شکل ۲ خانواده **منحنی‌های نمـایی** $y = Ce^x$ را، که منحنی‌های انتگرال معادله دیفرانسیل $y' = y$ می‌باشند، نشان می‌دهد. بار دیگر C نمایش عرض از مبدأ خواهد بـود. در ایـن حالـت C مسـاوی شـیب منحنی در نقطه تقاطع آن با محور y نیز می‌باشد.



۱ – منحنی‌های انتگرال معادله دیفرانسیل $y' = x$



۲ – منحنی‌های انتگرال معادله دیفرانسیل $y' = y$

Homogeneous first-order equations

We consider now a special kind of first –order equation,

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

in which the right–hand side has a special property known as homogeneity. This means that

$$f(tx, ty) = f(x, y) \qquad (2)$$

for all x, y, and all $t \neq 0$.

معادلات همگن مرتبه اول

حال نوع خاصی از معادلات مرتبه اول، یعنی

$$y' = f(x, y), \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که طرف راستش از خاصیت ویژه‌ای به نام همگنی برخوردار است. این بدان معنی است که به ازای هر x و y و هر $t \neq ۰$

$$f(tx, ty) = f(x, y). \qquad (۲)$$

In other words, replacement of x by tx and y by ty has no effect on the value of $f(x, y)$. Equations of the form (1) which have this property are called homogeneous (sometimes called homogeneous of degree zero). Examples are the following:

$$.\ y' = \frac{y - x}{y + x} \quad , \quad y' = (\frac{x^2 + y^2}{xy})^3 \quad , \quad y' = \frac{x}{y}\sin(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}) \quad , \quad y' = \log x - \log y$$

به عبارت دیگر تعویض x با tx و y با ty هیچ تـأثیری بـر مقـدار $f(x,y)$ نـدارد. معـادلاتی بـه شـکل (۱) کـه ایـن خاصـیت را داشـته باشـند، همگـن (گاهی اوقات همگن از درجه صفر) نام دارند. نمونه‌هایی از این معادلات در زیر آمده‌اند:

$$y'=\frac{y-x}{y+x} \quad , \quad y'=(\frac{x^۲+y^۲}{xy})^۳ \quad , \quad y'=\frac{x}{y}\sin(\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}) \quad , \quad y'=\log x-\log y.$$

If we use (2) with $t=\frac{1}{x}$, the differential equation in (1) becomes

$$y'=f(1,\frac{y}{x}) \qquad (3)$$

The appearance of the quotient $\frac{y}{x}$ on the right suggests that we introduce a new unknown function ν where $\nu=\frac{y}{x}$.

اگر (۲) را با $t=\frac{۱}{x}$ به کار بریم معادله دیفرانسیل (۱) به صورت

$$y'=f(۱,\frac{y}{x}) \qquad (۳)$$

در خواهد آمد. به وجود آمدن کسر $\frac{y}{x}$ در سمت راست، این فکر را پیش می‌آورد که یک تابع مجهول و جدید ν معرفی کنیم که در آن $\nu=\frac{y}{x}$.

Then $y=\nu x$, $y'=\nu' x+\nu$, and this substitution transforms (3)

$$\nu' x+\nu=f(1,\nu) \qquad \text{or} \qquad x\frac{d\nu}{dx}=f(1,\nu)-\nu$$

This last equation is a first–order **separable equation** for ν. We obtain an implicit formula for ν and then replace ν by $\frac{y}{x}$ to obtain an implicit formula for y.

در این صورت $y=\nu x$ ، $y'=\nu' x+\nu$ ، و این جایگزینی (۳) را به

$$x\frac{d\nu}{dx}=f(۱,\nu)-\nu \quad \text{یا} \quad \nu' x+\nu=f(۱,\nu)$$

تبدیل می‌کند. این معادله‌ی آخر یک **معادله جدایی‌پذیر** مرتبه اول نسبت به ν است. می‌توانیم یک فرمول ضمنی برای ν پیـدا کـرده و سـپس، بـا قـرار دادن $\frac{y}{x}$ به جای ν، یک فرمول ضمنی برای y به دست آوریم.

Linear equations of second order with constant coefficients

A differential equation of the form $\quad y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=R(x)$

is said to be a linear equation of second order. The functions P_1 and P_2 which multiply the unknown function y and its derivative y' are called the coefficients of the equation.

معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

یک معادله‌ی دیفرانسیل به شکل $\quad y''+P_۱(x)y'+P_۲(x)y=R(x)$

را یک معادله خطی مرتبه دوم می‌نامند. توابع $P_۱$ و $P_۲$ که در تابع مجهول y و مشتق آن y' ضرب شده‌اند ضرایب معادله نام دارند.

For first-order linear equations, we proved an **existence-uniqueness theorem** and determined all solutions by an explicit formula. Although there is a corresponding existence-uniqueness theorem for the general second-order linear equation, there is no explicit formula which gives all solutions, except in some special cases. A study of the general linear equation of second order is undertaken in **Volume II**. Here we treat only the case in which the coefficients P_1 and P_2 are constants. When the right – hand member R(x) is identically zero, the equation is said to be homogeneous.

برای معادلات خطی مرتبه اول یک **قضیه وجودی ـ یکتایی** را ثابت کرده و کلیه جواب‌ها را با فرمـول صـریحی مشـخص نمـودیم. اگـر چـه یـک قضـیه وجودی ـ یکتایی متناظر برای معادله‌ی خطی مرتبه دوم کلی وجود دارد، اما، به جز در چند مورد خاص، فرمول صریحی که کلیه جواب‌ها را بدهـد موجـود نیست. بررسی معادله خطی مرتبه دوم کلی در **جلد دو** صورت گرفته‌است. در این جا ما فقط به حالتی می‌پردازیم که در آن ضرایب $P_۱$ و $P_۲$ ثابت هسـتند. در حالتی که عضو طرف راست، یعنی $R(x)$، متحد صفر باشد، معادله را همگن می‌نامند.

The homogeneous linear equation with constant coefficients was the first differential equation of a general type to be completely solved. A solution was first published by Euler in 1743. Apart from its historical interest, this equation arises in a great variety of applied problems, so its study is of practical importance. Moreover, we can give explicit formulas for all the solutions.

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت اولین معادله دیفرانسیل از یک نوع کلی بود که کاملاً حل شد. حل آن برای اولین بار در ۱۷۴۳ توسط اویلر منتشر گردید. این معادله، جدا از جاذبه‌ی تاریخی‌اش، در مسائل عملی گوناگونی ظاهر می‌شود، از این رو مطالعه‌ی آن از اهمیت عملی برخوردار است. علاوه بر این، می‌توان برای کلیه جواب‌های آن فرمول‌های صریحی را ارائه داد.

Consider a homogeneous linear equation with constant coefficients which we write as follows:

$$y'' + ay' + by = 0$$

We seek solutions on the entire real axis $(-\infty, +\infty)$. One solution is the constant function $y = 0$. This is called the **trivial solution**. We are interested in finding nontrivial solutions, and we begin our study with some special cases for which nontrivial solutions can be found by inspection. In all these cases, the coefficient of y' is zero, and the equation has the form $y'' + by = 0$. We shall find that solving these special equations is tantamount to solving the general case.

یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت را در نظر بگیرید که آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$y'' + ay' + by = ۰$$

جواب‌های این معادله را بر تمام محور حقیقی $(-\infty, +\infty)$ جستجو می‌کنیم. یک جواب تابع ثابت $y = ۰$ است. این را **جواب بدیهی** می‌خوانند. ما در پی یافتن جواب‌های غیر بدیهی هستیم، و بررسی خود را با چند مورد خاص که در آن‌ها می‌توان جواب‌های غیر بدیهی را با بررسی یافت آغاز می‌کنیم. در همه این موارد ضریب y' صفر بوده و معادله به شکل $y'' + by = ۰$ می‌باشد. خواهیم دید که حل این معادلات خاص معادل حل حالت کلی می‌باشد.

We conclude this section with some miscellaneous remarks. Since all the solutions of the differential equation $y'' + ay' + by = 0$ are contained, the linear combination on the right is often called general solution of the differential equation. Any solution obtained by specializing the constants c_1 and c_2 is called is called a particular solution.

این بخش را با ذکر چند نکته به پایان می‌بریم. چون کلیه جواب‌های معادله دیفرانسیل از $y'' + ay' + by = ۰$ به دست می‌آیند اغلب ترکیب خطی سمت راست آن را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌خوانند. هر جواب که به ازای ثابت‌های خاص $c_۱$ و $c_۲$ به دست آید یک جواب خصوصی نام دارد.

For example, taking $c_1 = 1, c_2 = 0$, and then $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, we obtain the two particular solutions $v_1 = e^{\frac{-ax}{2}} u_1(x)$, $v_2 = e^{\frac{-ax}{2}} u_2(x)$. These two solutions are of special importance because **linear combinations** of them give us all solutions. Any pair of solutions with this property is called a basis for the set of all solutions.

مثلاً، با اختیار $c_۱ = ۱$، $c_۲ = ۰$ و سپس $c_۱ = ۰$، $c_۲ = ۱$، دو جواب خصوصی $v_۲ = e^{\frac{-ax}{۲}} u_۲(x)$ و $v_۱ = e^{\frac{-ax}{۲}} u_۱(x)$ را به دست می‌آوریم. این دو جواب از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند زیرا **ترکیبات خطی** آن‌ها کلیه جواب‌ها را به ما می‌دهند. هر جفت از جواب‌ها با این خاصیت یک پایه برای مجموعه‌ی کلیه‌ی جواب‌ها نامیده می‌شود.

A differential equation always has more than one basis. For example, the equation $y'' = 9y$ has the basis $v_1 = e^{3x}$, $v_2 = e^{-3x}$ But it has the basis $w_1 = \cosh 3x$, $w_2 = \sinh 3x$. In fact, since $e^{3x} = w_1 + w_2$ and $e^{-3x} = w_1 - w_2$, every linear combination of e^{3x} and e^{-3x} is also a linear combination of w_1 and w_2. Hence, the pair w_1, w_2 is another basis.

هر معادله دیفرانسیل همیشه بیش از یک پایه دارد. مثلاً معادله $y'' = ۹y$ دارای پایه‌ی $v_۱ = e^{۳x}$، $v_۲ = e^{-۳x}$ است. اما از پایه‌ی $w_۱ = \cosh ۳x$، $w_۲ = \sinh ۳x$ نیز برخوردار می‌باشد. در واقع، چون $e^{۳x} = w_۱ + w_۲$ و $e^{-۳x} = w_۱ - w_۲$، هر ترکیب خطی $e^{۳x}$ و $e^{-۳x}$ یک ترکیب خطی $w_۱$ و $w_۲$ نیز هست. از این رو جفت $w_۱$، $w_۲$ پایه‌ی دیگری خواهد بود.

It can be shown that any pair of solutions v_1 and v_2 of a differential equation $y'' + ay' + by = 0$ will be a basis if the ratio $\frac{v_2}{v_1}$ is not constant. Although we shall not need this fact, we mention it here because it is important in the theory of second –order linear equations with no constant coefficients.

می‌توان نشان داد که هر جفت جواب v_1 و v_2 ی معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ یک پایه است اگر که نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ ثابت نباشد. با آن که به این مطلب نیازی نخواهیم داشت ولی آن را در اینجا از این جهت ذکر نمودیم که در نظریه معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب غیر ثابت اهمیت دارد.

Both ordinary and partial differential equations are broadly classified as **linear** and **nonlinear**. A differential equation is **linear** if the unknown function and its derivatives appear to the power 1 (products are not allowed) and **nonlinear** otherwise. The characteristic property of linear equations is that their solutions form an affine subspace of an appropriate function space, which results in much more developed theory of linear differential equations.

هر دو معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی به دو دسته عمده خطی و غیرخطی تقسیم می شوند. یک معادله‌ی دیفرانسیل، خطی است اگر تابع مجهول و مشتقات آن دارای توان ۱ باشند (ضرب بین آنها غیر مجاز است) و در غیر اینصورت غیرخطی است. ویژگی شاخص معادلات خطی این است که جواب‌های آنها یک زیرفضای آفین از یک فضای تابعی مناسب ایجاد می‌کنند، که در نظریه‌ی توسعه یافته‌ی معادلات دیفرانسیل خطی نتیجه می‌دهد.

Homogeneous linear differential equations are a further subclass for which the space of solutions is a linear subspace i.e. the sum of any set of solutions or multiples of solutions is also a solution. The coefficients of the unknown function and its derivatives in a linear differential equation are allowed to be (known) functions of the independent variable or variables; if these coefficients are constant then one speaks of a **constant coefficient linear differential equation**.

معادلات دیفرانسیل خطی **همگن** یک زیرکلاس دیگر هستند که فضای جواب‌ها یک زیر فضای خطی است یعنی مجموع هر مجموعه‌ای از جواب‌ها یا مضارب آنها نیز یک جواب است. ضرایب تابع مجهول و مشتقات آن در یک معادله دیفرانسیل خطی می‌تواند توابع (معلوم) با متغیر یا متغیرهای مستقل باشد؛ اگر این ضرایب، ثابت باشند آنگاه بحث **معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت** پیش می آید.

A linear equation obliges the unknown function *y* to have some restrictions. Indeed, the only operations which are accepted for the variable *y* are:

(i) Differentiating *y*;

(ii) Multiplying *y* and its derivatives by a function of the variable *x*

(iii) Adding what you obtained in (ii) and let it be equal to a function of *x*.

در یک معادله خطی باید تابع مجهول y محدودیت‌هایی داشته باشد. در واقع، تنها اعمال مجاز برای متغیر y عبارتند از:

(۱) مشتق گرفتن از y

(۲) ضرب y و مشتقات آن در تابعی با متغیر x

(۳) جمع کردن با آنچه در (۲) به دست آمده و مساوی قرار دادن آن با تابعی از x

Linear differential equations frequently appear as approximations to nonlinear equations. These approximations are only valid under restricted conditions. For example, the harmonic oscillator equation is an approximation to the nonlinear pendulum equation that is valid for small amplitude oscillations.

معادلات دیفرانسیل خطی به طور مکرر به عنوان تقریب‌هایی از معادلات غیرخطی ظاهر می‌شوند. این تقریب‌ها فقط تحت شرایط محدودی معتبر هستند. مثلاً معادله نوسانی همساز تقریبی است از معادله آونگ غیرخطی که برای نوسانات با دامنه‌ی نوسان کوچک درست است.

Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB

Ordinary differential equations (ODEs) describe phenomena that change continuously. They arise in models throughout mathematics, science, and engineering. By itself, a system of ODEs has many solutions. Commonly a solution of interest is determined by specifying values of all its components at a single point $x = a$. This is an **initial value problem** (IVP). However, in many applications a solution is determined in a more complicated way. A **boundary value problem** (BVP) specifies values or equations for solution components of at more than one x.

حل مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی در MATLAB

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) پدیده‌هایی را توضیح می‌دهند که به طور پیوسته تغییر می‌کنند. آن‌ها در مدل‌های ریاضی، علوم و مهندسی ایجاد می‌شوند. به تنهایی، یک دستگاه از ODEها جواب‌های زیادی دارد. معمولاً یک جواب مفید با مشخص کردن مقادیر تمام مؤلفه‌های آن در نقطه تنهای $x = a$ معلوم می‌شود. این یک **مسأله مقدار اولیه** (IVP) است. به هر حال، در خیلی از کاربردها، جواب به روش‌های پیچیده‌تری به دست می‌آید. یک **مسأله مقدار مرزی** (BVP) مقادیر یا معادله‌های مؤلفه‌های جواب را در بیش از یک x مشخص می‌کند.

Unlike IVPs, a boundary value problem may not have a solution, or may have a finite number, or may have infinitely many. Because of this, programs for solving BVPs require users to provide a primary guess for the solution desired. Often there are parameters that have to be determined so that the BVP has a solution. Again there might be more than one possibility, so programs require a guess for the parameters desired. **Singularities** in coefficients and problems posed on infinite intervals are not unusual. Simple examples are used in **§2** to illustrate some of these possibilities.

برخلاف IVPها یک مسأله مقدار مرزی، ممکن است جوابی نداشته باشد، یا ممکن است تعداد متناهی یا ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشد. به این خاطر، برنامه‌های حل BVPها نیازمند این است که کاربر یک حدس اولیه برای جواب مورد نیاز ارائه دهد. اغلب پارامترهایی وجود دارند که باید معلوم شوند به طوری که BVP جواب داشته باشد. باز هم ممکن است بیش از یک امکان وجود داشته باشد، پس برنامه‌ها به حدسی برای پارامترهای مورد نیاز احتیاج دارند. **نقاط منفرد** در ضرایب و مسائل واقع روی بازه‌های نامتناهی، غیر عادی نیستند. مثال‌های ساده در **§2** آمده است تا بعضی از این امکان‌ها را توضیح دهد.

This tutorial shows how to formulate, solve, and plot the solution of a BVP with MATLAB program bvp4c. It aims to make solving a typical BVP as easy as possible. BVPs are much harder to solve than IVPs and any solver might fail, even with good guesses for the solution and unknown parameters. Bvp4c is an effective solver, but the underlying method and computing environment are not appropriate for high accuracies nor for problems with extremely sharp changes in their solutions.

این خودآموز نشان می‌دهد چگونه جواب یک BVP را در MATLAB با برنامه‌ی bvp4c فرمول‌بندی، حل و رسم کنیم. متلب قصد دارد یک BVP نوعی را در نهایت سادگی حل کند. BVPها بسیار سخت‌تر از IVPها حل می‌شوند و هر حل‌کننده‌ای ممکن است حتی با حدس‌های خوب برای جواب و پارامترهای نامعلوم به جواب نرسد. Bvp4c یک حل کننده کارا می‌باشد، اما روش اساسی و محیط محاسبات نه برای دقت بالا و نه برای مسائل با تغییرات سریع در جوابشان مناسب نیستند.

Boundary Value Problems

If the function f is **smooth** on [a, b], the initial value problem $y' = f(x,y), y(a)$ given, has a solution, and one. Two-point boundary value problems are exemplified by the equation.

$$y'' + y = 0$$

with boundary conditions $y(a) = A$, $y(b) = B$. An important way to analyze such problems is to consider a family of solutions of IVPs. Let $y(x,s)$ be the solution of equation **(1)** with initial values $y(a) = A$, $y'(a) = s$. Each $y(x,s)$ extends to $x = b$ and we ask, for what values of s does $y(b,s) = B$? If there is a solution s to this algebraic equation, the corresponding $y(x,s)$ provides a solution of the differential equation that satisfies the two boundary conditions. Using linearity we can sort out the possibilities easily.

مسائل مقدار مرزی

اگر تابع f روی $[a,b]$ **هموار** باشد، مسأله مقدار اولیه‌ی $y' = f(x,y), y(a)$ ، یک و فقط یک جواب دارد. مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای با مثال زیر توضیح داده می‌شود:

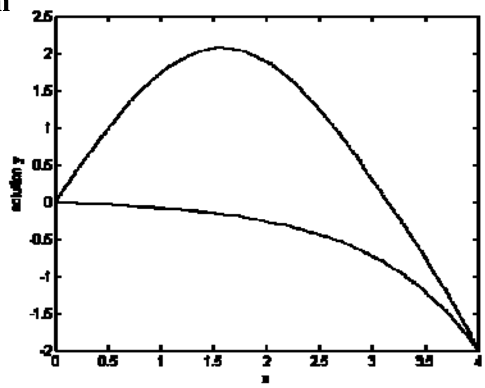
$$y'' + y = ۰$$

با شرایط مرزی $y(a) = A$ و $y(b) = B$. یک روش مهم برای تحلیل چنین مسائلی این است که خانواده‌ای از جواب‌های IVPها را بررسی کنیم. فرض کنید $y(x,s)$ جواب معادله (۱) با مقادیر اولیه $y(a) = A$ و $y'(a) = s$ باشد. هر $y(x,s)$ به $x = b$ توسعه می‌یابد و می‌پرسیم، برای کدام مقادیر s داریم $y(b,s) = B$ ؟ اگر یک جواب s برای این معادله‌ی جبری موجود باشد، $y(x,s)$ متناظر، یک جواب برای معادله دیفرانسیل فراهم می‌کند که در دو شرط مرزی صدق می‌کند. با استفاده از خطی بودن می‌توانیم حالت‌های ممکن را به آسانی دسته‌بندی کنیم.

Let $u(x)$ be the solution defined by $y(a)=A$, $y'(a)=0$ and $u(x)$ be the solution defined by $y(a)=0$, $y'(a)=1$. Linearity implies that $y(x,s)=u(x)+sv(x)$, and the boundary condition $B=y(b,s)=u(b)+sv(b)$ amounts to a linear algebraic equation for the unknown initial slope s. The familiar facts of existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations then tell us that there is either exactly one solution to the BVP, or there are boundary values B for which there is no solution and others for which there are infinitely many solutions.

فرض کنیم $u(x)$ جوابی باشد که با $y(a)=A$ و $y'(a)=0$ تعریف شده باشد و $u(x)$ جوابی باشد که با $y(a)=0$ و $y'(a)=1$ تعریف شده باشد. خطی بودن دلالت می‌کند $y(x,s)=u(x)+sv(x)$ و شرط مرزی $B=y(b,s)=u(b)+sv(b)$ به یک معادله‌ی جبری خطی با شیب اولیه مجهول s تبدیل می‌شود. مفاهیم آشنای وجود و یکتایی جواب‌های معادلات جبری خطی می‌گوید که یا دقیقاً یک جواب برای BVP موجود است یا مقادیر مرزی B موجود هستند که به ازای آن‌ها جوابی وجود ندارد و مقادیری که به ازای آن‌ها بی‌نهایت جواب وجود دارد.

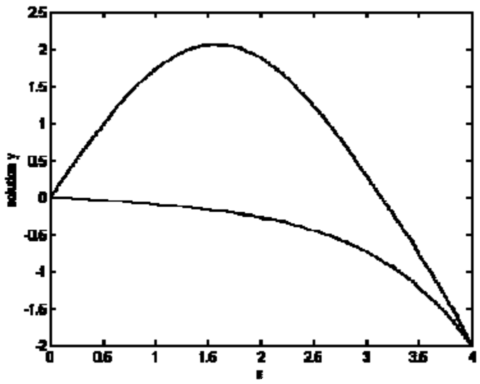
Nonlinearity introduces other complications illustrated by the problem $y''+|y|=0$ with $y(0)=0$, $y(b)=B$. Proceeding as with the linear examples it is found that for any $b<\pi$, there are exactly two solutions for any $B<0$. One solution has the form $y(x,s)=s\sinh x$; it starts off with a negative slope s and decreases monotonely to B. The other starts off with a positive slope where it has the form $y(x,s)=s\sin x$. This solution crosses the axis at $x=\pi$, where its form changes and it decreases thereafter monotonely to B. Fllowing Figure shows an example of this with $b=4$ and $B=-2$. Much as **eigenvalue problems**, when solving nonlinear BVPs we have specify which solution is the one that interests us.



Two solutions for $y''+|y|=0$.

غیر خطی بودن، پیچیدگی‌هایی را ایجاد می‌کند که با مسأله تشریح می‌شوند

$y''+|y|=0$ با $y(0)=0$ و $y(b)=B$. با کار کردن با مثال‌های خطی، فهمیده می‌شود که برای هر $b<\pi$، دقیقاً دو جواب برای هر $B<0$ موجود است. یک جواب به شکل $y(x,s)=s\sinh x$ است، با یک شیب منفی s شروع می‌شود و به صورت یکنوا به B کاهش می‌یابد. دیگری با یک شیب مثبت شروع می‌شود که در آن به شکل $y(x,s)=s\sin x$ می‌باشد. این جواب، محور را در $x=\pi$ قطع می‌کند، که در آن که شکل آن تغییر می‌کند و سپس به طور یکنوا به B کاهش می‌یابد. شکل زیر یک مثال از این مسأله با $b=4$ و $B=-2$ را نشان می‌دهد. با این که **مسائل مقدار ویژه**، هنگام حل BVPهای غیرخطی، باید مشخص کنیم کدام جواب برای ما مناسب است.



دو جواب برای $y''+|y|=0$.

Before looking at power series solutions to a differential equation we will first need to do a cursory review of power series. Now we will finally be looking at nonconstant coefficient differential equations. While we won't cover all possibilities in this chapter we will be looking at two of the more common methods for dealing with this kind of differential equations.

قبل از نگاه به جواب سری توانی برای یک معادله‌ی دیفرانسیل، ابتدا نیاز داریم مروری اجمالی بر سری توانی داشته باشیم. هم اکنون نگاهی به معادلات دیفرانسیل با ضرایب غیر ثابت می اندازیم. در حالی که تمام حالت‌های ممکن را در این فصل نخواهیم پوشاند، به دو روش عمومی‌تر مربوط به این نوع معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

The first method that we'll be taking a look at, series solutions, will actually find a series representation for the solution instead of the solution itself. You first saw something like this when you looked at Taylor series. As we will see however, this won't work for every differential equation. The second method that we'll look at will only work for a special class of differential equations. This special case will cover some of the cases in which series solutions can't be used.

اولین روشی که به آن می پردازیم ، روش سری، در واقع به جای خود جواب یک نمایش سری برای جواب می‌یابد. شما ابتدا هنگام بررسی سری تیلور چیزی شبیه این دیدید. همانطور که خواهیم دید این روش برای هر معادله دیفرانسیل کار نخواهدکرد. روش دومی که به آن خواهیم پرداخت تنها برای دسته‌ی خاصی از معادلات دیفرانسیل کار می کند. این حالت خاص، برخی از حالاتی که روش سری نمی‌پوشاند را می‌پوشاند.

CHAPTER FOUR
((Complex Functions))

Analytic Functions

A function f of the complex variable z is analytic at a point z_0 if its derivative $f'(z)$ exists not only at z_0 but at every point z in some neighborhood of z_0. It is analytic in a domain of the z plane if it is analytic at every point in that domain. The terms **"regular" and "holomorphic"** are sometimes introduced to denote analyticity in domains of certain classes.

The function $|z|^2$, for instance, is not analytic at any point, since its derivative exists only at the point z=0, not throughout any neighborhood.

توابع تحلیلی

تابع f از متغیر مختلط z در نقطه z_0 تحلیلی است اگر مشتق آن $f'(z)$ نه تنها در z_0 بلکه در یک همسایگی از z_0 موجود باشد. تابع f در ناحیه‌ای از صفحه z تحلیلی است اگر در هر نقطه از آن دامنه تحلیلی باشد. گاهی اوقات عبارت «**منظم**» و «**هولومورفیک**» به معنی تحلیلی بودن در ناحیه‌های دسته‌های مشخص به کار رفته اند.

مثلاً تابع $|z|^۲$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست، زیرا مشتق آن فقط در $z=۰$ موجود است و در هیچ همسایگی آن مشتق ندارد.

An **entire function** is one that is analytic at every point of the z plane, that is, throughout the entire plane. We have shown that the derivative of every polynomial in z exists at every point, hence every polynomial

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

is an entire function.

If a function is analytic at some point in every neighborhood of a point z_0 except at z_0 itself, then z_0 is called a **singular point, or a singularity of the function**.

یک **تابع تام**، تابعی است که در تمام نقاط صفحه تحلیلی باشد. نشان داده‌ایم که مشتق هر چندجمله‌ای در z در هر نقطه‌ای موجود است؛ از اینرو هر چندجمله‌ای با هم باشد.

$$p(z) = a_۰ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \dots + a_n z^n \qquad (n = ۰,۱,۲,\dots)$$

یک تابع تام است.

اگر تابعی در برخی از نقاط هر همسایگی $z_۰$ به جز خود $z_۰$ تحلیلی باشد، آنگاه $z_۰$ **نقطه تکین تابع یا تکینی تابع** نامیده می‌شود.

For example, we have seen that if,

$$f(Z) = \frac{1}{Z} \qquad \text{then} \qquad f'(Z) = -\frac{1}{Z^2} \qquad (Z \neq 0)$$

Thus f is a analytic at every point except the point z=0, where it is not continuous, so that $f'(0)$ cannot exist. The point $z=0$ is a singular point. On the other hand, our definition assigns no singular points at all to the function $|z|^2$, since the function is nowhere analytic.

مثلاً، دیدیم اگر $f(z)=\frac{۱}{z}$ آنگاه $f'(z)=\frac{-۱}{z^۲}$ $(z\neq ۰)$. بنابراین f در هر نقطه غیر از $z=۰$ که در آن پیوسته نیست، تحلیلی است، بنابراین $f'(۰)$ نمی‌تواند موجود باشد. نقطه $z=۰$ نقطه‌ای تکین است. به عبارت دیگر، طبق تعریف ما تابع $|z|^۲$ اصلاً دارای نقطه تکین نیست، زیرا هیچ جا تحلیلی نیست.

A necessary, but by no means sufficient, condition for a function to be analytic in a domain D is clearly that the function be continuous throughout D. The **Cauchy- Riemann conditions** are also necessary, but not sufficient. Two sets of sufficient conditions for analyticity in D are given, if the hypotheses stated in those theorems are satisfied at every point of D. But other useful sets of sufficient conditions arise in the following way from the conditions of validity of the differentiation formulas.

یک شرط لازم، اما کاملاً غیر کافی، برای اینکه تابعی در ناحیه D تحلیلی باشد، بوضوح پیوستگی تابع در سراسر D است. همچنین **معادلات کوشی ـ ریمان** لازم هستند ولی کافی نیست. دو دسته از شرایط کافی برای تحلیلی بودن در D داده شده‌اند، اگر که فرض‌های بیان شده در آن قضایا در تمام نقاط D برقرار شوند. اما سایر شرایط کافی به طریق زیر از شرایط درستی فرمول‌های مشتق‌گیری پدیدار می‌شوند.

The function $$u = y^3 - 3x^2y$$

is readily seen, by direct substitution into Laplace's equation, to be a **harmonic function**. In order to find its **harmonic conjugate** v, we note that $$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$$

from which, by using one of the Cauchy- Riemann equations, we may conclude that

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy$$

با جایگذاری تابع $$u = y^۳ - ۳x^۲y$$

در معادله لاپلاس، به سادگی ملاحظه می‌شود که یک **تابع همساز** است. به منظور به دست آوردن **مزدوج همساز** آن ، v، توجه می‌کنیم که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -۶xy$$

که با استفاده از معادلات کوشی-ریمان می‌توانیم نتیجه بگیریم که $$\frac{\partial v}{\partial y} = -۶xy$$

Integrating this equation with respect to y with x held fixed, we find that

$$u = -3xy^2 + \varphi(x)$$

where $\varphi(x)$ is at present an arbitrary function of x. But since $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, it follows that

$$-3y^2 + \varphi'(x) = -3y^2 + 3x^2;$$

Therefore $\varphi'(x) = 3x^2$ and $\varphi(x) = x^3 + c$, where c is an arbitrary constant. Hence the harmonic conjugate of the function $u = y^3 - 3x^2y$ is $$u = -3xy^2 + x^3 + c$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نسبت به y در حالی‌که x ثابت نگه داشته شود، نتیجه می‌گیریم که: $u = -۳xy^۲ + \varphi(x)$ که در آن $\varphi(x)$ فعلاً تابع دلخواهی از x است. ولی از آنجا که $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ نتیجه می‌شود که $-۳y^۲ + \varphi'(x) = -۳y^۲ + ۳x^۲$

بنابراین $\varphi'(x) = ۳x^۲$ و $\varphi(x) = x^۳ + c$ که c یک ثابت دلخواه است. پس مزدوج همساز تابع $u = y^۳ - ۳x^۲y$ برابر است با:

$$u = -۳xy^۲ + x^۳ + c$$

The corresponding function f = u +iv is

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) + ic \qquad (1)$$

It is easily verified that $$f(z) = i(z^3 + c)$$

This form is suggested by noting that when y=0, equation (4-1) becomes.

$$f(x) = i(x^3 + c)$$

Later on we shall show that, corresponding to each harmonic function u , a harmonic conjugate function v exists.

تابع متناظر $f = u + iv$ چنین است:

$$f(z) = y^۳ - ۳x^۲y + i(x^۳ - ۳xy^۲) + ic \qquad (۱)$$

به راحتی می‌توان دید که $$f(z) = i(z^۳ + c)$$

CHAPTER SIX
((Algebra))

Normal Subgroups and Quotient Groups

Let G be the group S_3 and let H be the subgroup $\{e,\phi\}$. Since the index of H in G is 3, there are three **right cosets** of H in G and there **left cosets** of H in G. We list them:

Right Cosets	Left Cosets
$H=\{e,\phi\}$	$H=\{e,\phi\}$
$H\psi=\{\psi,\phi\psi\}$	$\psi H=\{\psi,\psi\phi=\phi\psi^2\}$
$\psi^2 H=\{\psi^2,\psi^2\phi=\phi\psi\}$	$\psi^2 H=\{\psi^2,\psi^2\phi=\phi\psi\}$

A quick inspection yields the interesting fact that the right coset $H\psi$ is not a left coset. Thus, at least for this subgroup, the notions of left and right coset need not coincide.

زیرگروه‌های بهنجار و گروه‌های خارج قسمتی

Gرا گروه S_3 می‌انگاریم، و فرض می‌کنیم که H زیر گروه $\{e,\psi\}$ باشد. از آن‌جا که شاخص H در G برابر ۳ است، پس H در G سه **هم‌مجموعه راست** و سه **هم‌مجموعه چپ** دارد. این هم‌مجموعه‌ها را در زیر می‌آوریم:

هم‌مجموعه‌های راست	هم‌مجموعه‌های چپ
$H=\{e,\phi\}$	$H=\{e,\phi\}$
$H\psi=\{\psi,\phi\psi\}$	$\psi H=\{\psi,\psi\phi=\phi\psi^2\}$
$H\psi^2=\{\psi^2,\phi\psi^2\}$	$\psi^2 H=\{\psi^2,\psi^2\phi=\phi\psi\}$

با بررسی سریع متوجه این نکته جالب می‌شویم که هم‌مجموعه راست $H\psi$ مساوی هیچ هم‌مجموعه چپی نیست. لذا، دست کم در مورد این زیرگروه، مفهوم‌های هم‌مجموعه چپ و راست، لزوماً یکی نخواهند بود.

In $G=S_3$ let us consider the subgroup $N=\{e,\psi,\psi^2\}$. Since the index of N in G is 2 there are two left cosets and two right cosets of N in G. We list these:

Right Cosets	Left Cosets
$N=\{e,\psi,\psi^2\}$	$N=\{e,\psi,\psi^2\}$
$N\phi=\{\phi,\psi\phi,\psi^2\phi\}$	$\phi N=\{\phi,\phi\psi,\phi\psi^2\}$
	$=\{\phi,\psi^2\phi,\psi\phi\}$

A quick inspection here reveals that every left coset of N in G is a right coset in G and conversely. Thus we see that for some subgroups, the notion of left coset coincides with that of right coset, whereas for some subgroups these concepts differ.

در $G=S_3$، زیرگروه $N=\{e,\psi,\psi^2\}$ را مورد توجه قرار می‌دهیم. چون شاخص N در G مساوی ۲ است، پس N در G صاحب دو هم‌مجموعه چپ و دو هم‌مجموعه راست است. این مجموعه‌ها در زیر آمده‌اند:

هم‌مجموعه‌های راست	هم‌مجموعه‌های چپ
$N=\{e,\psi,\psi^2\}$	$N=\{e,\psi,\psi^2\}$
$N\phi=\{\phi,\psi\phi,\psi^2\phi\}$	$\phi N=\{\phi,\psi\phi,\phi\psi^2\}$
	$=\{\phi,\psi^2\phi,\psi\phi\}$

با بررسی سریع، مشخص می‌شود که هر هم‌مجموعه چپ N در G یک هم‌مجموعه راست N در G است و بالعکس. لذا، می‌بینیم که در مورد برخی از زیرگروه‌ها، مفهوم هم‌مجموعه چپ با هم‌مجموعه راست یکی است حال آن که این مفاهیم برای بعضی زیر گروه‌ها تفاوت دارند.

Definition and Examples of Rings

As we indicated in previous there are certain algebraic systems which serve as the building blocks for the structures comprising the subject which is today called modern algebra. At this stage of the development we have learned something about one of these, namely groups. It is our purpose now to introduce and to study a second such namely rings.

تعریف و چند مثال از حلقه‌ها

همانطور که در گذشته خاطر نشان شد، برخی از دستگاه‌های جبری به منزله مصالح ساختمانی ساختارهایی هستند که از آن‌ها مبحثی پدیده آمده است که امروزه جبر مدرن نام دارد. تا این‌جا مطالبی درباره یکی از آن‌ها، به نام گروه‌ها، چیزهایی آموخته‌ایم. اکنون هدف ما معرفی و بررسی دومین دستگاه از این نوع، یعنی حلقه‌ها، می‌باشد.

The abstract concept of a group has its origins in the set of mappings, or **permutations**, of a set onto itself. In contrast, rings stem from another and more familiar source, the set of integers. We shall see that they are patterned after, and are generalizations of, the algebraic aspects of the ordinary integers.

سرچشمه‌ی مفهوم انتزاعی گروه، از مجموعه نگاشت‌ها، یا **جایگشت‌های** یک مجموعه به روی خود آن است. حال آن که حلقه‌ها از منبعی دیگر و آشناتر، یعنی مجموعه عددهای صحیح، پدید آمدند. خواهیم دید که این حلقه‌ها مورد الگوبرداری قرار می‌گیرند و تعمیم جنبه‌های جبری اعداد صحیح معمولی هستند.

In the next paragraph it will become clear that a ring is quite different from a group in that it is a two –operational system; operations are usually called addition and multiplication. Yet, despite the difference, the analysis of rings will follow the pattern already laid out for groups.

در بند بعد خواهیم دید که یک حلقه با یک گروه کاملاً متفاوت است، از آن جهت که هر حلقه دستگاهی است با دو عمل؛ این اعمال معمولاً جمع و ضرب نامیده می‌شوند. اما، با وجود این تفاوت، تحلیل حلقه‌ها به همان صورتی انجام می‌گیرد که در مورد گروه‌ها دیدیم.

We shall require the appropriate analogs of homomorphism, **normal subgroups**, factor groups, etc. With the experience gained in our study of groups we shall be able to make the requisite definitions, intertwine them with meaningful theorems, and end up proving results which are both interesting and important about **mathematical_objects** with which we have had long acquaintance. To cite merely one instance, later on in the book, using the tools developed here, we shall prove that it is impossible to trisect an angle of 60^o using only a straight –edge and compass.

در این مورد نیاز به مفهوم‌های مناسبی شبیه همریختی، **زیرگروه‌های بهنجار**، گروه‌های عامل، و مانند این‌ها، خواهیم داشت. آنچه که در بررسی گروه‌ها آموختیم به ما این قدرت را خواهد داد که به تعریف‌های مورد نیاز دست یابیم، آن‌ها را با قضایایی بامعنی بیامیزیم، و بالاخره نتایجی جالب و مهم، درباره **موجودات ریاضی** که مدت‌هاست با آن‌ها سروکار داریم ثابت نماییم. فقط یکی از این موارد را ذکر می‌کنیم، که بعداً در این کتاب با استفاده از ابزاری که در این فصل گسترش یافتند، ثابت خواهد شد که تقسیم زاویه 60^o به سه قسمت متساوی فقط با کمک خط‌کش و پرگار میسر نیست.

A simple computation now shows that X.Y=1. Thus the nonzero elements of Q form a **non-abelian group** under multiplication. A ring in which the nonzero elements form a group is called a **division ring or skew-field**. Of course, a commutative division ring is a field. Q affords us a division ring which is not a field. Many other examples of non commutative division rings exist, but we would be going to for afield to present one here. The investigation of the nature of division rings, and the attempts to classify them form an important part of algebra.

Vocabulary

Artificial Variable **متغیر مصنوعی**

Example: When any of the constraints is an equation, there are two possible approaches. In one we replace the equation by a pair of inequalities. An alternative way, sometimes significantly easier to manage by hand is to introduce a corresponding artificial variable.

وقتی تمام قیدها معادله هستند دو راه وجود دارد. راه اول این است که معادله را با یک جفت نامعادله تعویض کنیم. راه دیگر، که گاهی اوقات انجام آن به صورت دستی مشخصاً آسان‌تر است، این است که یک متغیر مصنوعی متناظر معرفی کنیم.

Basic Solution **جواب پایه‌ای**

Example: Each solution to any system of equations is called a Basic Solution (BS). Those Basic Solutions which are feasible are called Basic Feasible Solutions (BFS). The vertices of solution region are the BFS.

هر جوابی برای هر دستگاه معادلات یک جواب پایه‌ای (BS) نام دارد. آن جواب‌های پایه‌ای که شدنی باشند را جواب‌های شدنی پایه‌ای (BFS) نامند. رأس‌های ناحیه جواب، همان BFS می‌باشد.

Big-M Method **روش M بزرگ**

Example: The Big M method is an alternative form of two-stage simplex which requires only one objective function.

روش M بزرگ روشی جایگزین از سیمپلکس دومرحله‌ای است که فقط به یک تابع هدف نیاز دارد.

Constraints **قید یا محدودیت‌ها**

Example: A linear equation represents a straight line. Limited time, labor etc. may be expressed as linear inequality or equations and are called constraints.

یک معادله خطی، خط مستقیمی را نمایش می‌دهد. محدودیت زمان، کار و ... می‌تواند به صورت نامعادله یا معادلات خطی بیان شود و همگی محدودیت هستند.

Feasible Solution **جواب شدنی**

Example: A set of values of the variables x_1, x_2, x_3,….,x_n which satisfy all the constraints and also the non-negativity conditions is called the feasible solution of the LPP.

یک مجموعه مقادیر از متغیرهای $x_۱, x_۲, x_۳,..., x_n$ که در تمام محدودیت‌ها و شرایط نامنفی بودن صدق می‌کند یک جواب شدنی از LPP می‌باشد.

Infeasible Solution **جواب نشدنی**

Example: The fact that a particular solution may be infeasible does not imply that the problem itself is infeasible. However, infeasible problems do exist.

این واقعیت که یک جواب خاص، ممکن است نشدنی باشد موجب نمی‌شود که خود مسأله نشدنی باشد. هرچند مسایل نشدنی هم موجودند.

Objective Function **تابع هدف**

Example: The Objective Function is a linear function of variables which is to be optimized i.e., maximized or minimized. e.g., profit function, cost function etc.

تابع هدف تابعی خطی از متغیرهاست که باید بهینه شود یعنی ماکسیمم یا مینیمم شود مثلاً تابع سود، تابع هزینه و ... .

Optimal Solution **جواب بهینه**

Example: The feasible solution, which optimizes (i.e., maximizes or minimizes as the case may be) the objective function is called the optimal solution.

جواب شدنی که تابع هدف را بهینه می‌کند (یعنی بسته به مسأله، ماکسیمم یا مینیمم می‌کند) را جواب بهینه می‌نامند.

Optimization بهینه‌سازی

Example: A decision which is considered the best one, taking into consideration all the circumstances is called an optimal decision.

تصمیمی که با در نظر گرفتن تمام شرایط بهترین روش تلقی می‌شود، یک تصمیم بهینه نامیده می‌شود.

Penalty جریمه

Example: In order to reflect the undesirability of a nonzero artificial vector, the objective function is modified such that a large penalty is paid for any such solution.

برای واکنش به نامطلوب بودن یک بردار مصنوعی ناصفر، تابع هدف طوری اصلاح می‌شود که یک جریمه بزرگ برای هر جواب اینچنینی پرداخت شود

Simplex Method روش سیمپلکس

Example: The Simplex Method is another algorithm for solving LP problems.

روش سیمپلکس الگوریتم دیگری برای حل مسائل LP است.

LPP Solution Of A LPP جواب یک

Example: A set of values of the variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ which satisfy all the constraints is called the solution of the LPP.

یک مجموعه از مقادیر از متغیرهای $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ که در تمام محدودیت‌ها صدق می‌کند را یک جواب LPP گویند.

Two – Phase Method روش دو مرحله‌ای

Example: The two-phase method is one way to get rid of the artificial variables.

روش دو مرحله‌ای، راهی است برای خلاص شدن از متغیرهای مصنوعی.

مدرسان شریف

CHAPTER TEN
((GRAMMAR))
« گرامر »

حروف در زبان انگلیسی

۱ـ حروف در زبان انگلیسی به دو گروه طبقه‌بندی می‌شوند:

الف ـ حروف صدادار The Vowel Letters که عبارتند از: a-e-i-o-u

ب ـ حروف بی‌صدا consonanat که شامل بقیه حروف انگلیسی می‌شود.

نکته ۱: چنانچه (y) صدای آی یا ای بدهد آن را صدادار و در غیر این‌صورت، بی‌صدا تلقی می‌کنند.

مثال۱:

حمل کردن	**carry**	تلاش کردن	**try**	به وسیله	**by**

نکته۲: چنانچه حرف (w) همراه با یک حرف صدادار که آن حرف در وسط یا آخر کلمه بیاید حرف (w) را صدادار و در غیراین صورت، بی‌صدا تلقی می‌کنند.

مثال۲:

پیروی کردن	**follow**	گاو	**cow**

نکته۳: حرف (w) چنانچه در ابتدای جمله و قبل از حرف (R) بیاید تلفظ نمی‌شود.

مثال۳:

نادرست	**wrong**	از جا کندن	**wrench**	پیچیدن	**wrap**

اسم

۱ـ اسم کلمه‌ای است که برای نامیدن اشخاص، اشیا و هر چیز دیگری بکار می‌رود و تقسیم‌بندی آن به شرح زیر است:

اسم (Noun)
- ۱ـ اسم معنی (Abstract Noun)
- ۲ـ اسم ذات (Concrete Noun)
  - ۱ـ۲. اسم خاص (Proper Noun)
  - ۲ـ۲. اسم عام (Common Noun)
  - ۳ـ۲. اسم جمع (Cellective Noun)
  - ۴ـ۲. اسم جنس (Material Noun)

۲ـ به اسمی که مربوط به چیزی باشد که نمی‌توان آن را لمس کرد اسم معنی می‌گویند.

مثال۴:

تهی‌دستی	**poverty**	گریه	**weeping**	توانایی	**ability**

۳ـ به اسمی که مربوط به چیزی باشد که می‌توان آن را لمس کرد اسم واقعی می‌گویند.

مثال۵:

کتاب	**book**	سگ	**dog**	گربه	**cat**

۴ـ به واژه‌ای که به شخص یا چیزی مشخص دلالت دارد اسم خاص می‌گویند.

مثال۶: **1- Iran** **2- Tehran** **3- Vahid**

نکته۴: معمولاً پیش از اسم خاص، the به کار نمی‌رود.

۵ـ واژه‌ای که برای همه افراد هم نوع یا هم جنس بکار می‌رود را اسم عام می‌گویند.

مثال۷: میز **Table** زن **Woman** دیوار **Wall**

۶ـ اسمی را که در صورت، مفرد ولی در معنا به صورت جمع است اسم جمع می‌گویند.

مثال۸: مردم **People** گله گوسفند **Flock** اخبار **News**

نکته۵: اسامی جمع با فعل مفرد بکار می‌روند.

مثال۹: **A group of teachers is working on the new reaserch.**

گروهی از استادان بر روی پژوهش جدیدی کار می‌کنند.

نکته۶: cattle (گله گاو) و flock (گله گوسفند) هم با فعل مفرد و هم با فعل جمع بکار می‌روند.

نکته۷: اسامی police (پلیس) و people (مردم) همیشه با فعل جمع بکار می‌رود.

۷ـ اسمی را که بر نوع و جنس دلالت دارد اسم جنس می‌گویند.

مثال۱۰: آهن **Iron** بچه **Child** گاو نر **Ox**

۸ـ اسمی را که از دو یا چند کلمه تشکیل شده باشد اسم مرکب (Compound Noun) می‌گویند.

مثال۱۱: علم بشری **man-maid-science** روزنامه **newspaper**

اسامی قابل شمارش و غیرقابل شمارش

۱ـ اسم قابل شمارش (Countable Noun) اسمی است که برای نامیدن چیزهایی به کار می‌رود که قابل شمردن است.

مثال۱۲:

جمع (Plural)	مفرد (Singular)
tables	a table
oranges	an orange

۲ـ اسم غیرقابل شمارش (uncountable Noun) برای نامیدن چیزهایی به کار می‌رود که قابل شمردن نیست.

مثال۱۳: قهوه **Coffee** آب **Water** شکر **Sugar**

نکته۸: قبل از اسامی غیرقابل شمارش نمی‌توان از حرف تعریف a یا an استفاده کرد.

قواعد جمع‌بستن اسم در زبان انگلیسی

۱ـ با اضافه کردن s به آخر اسم مفرد، اسامی، جمع بسته می‌شوند.

مثال۱۴:

1.a book	یک کتاب	**books**	کتاب‌ها
2. a bag	یک کیف	**bags**	کیف‌ها
3. a martyr	یک شهید	**martyrs**	شهدا

۲ـ هرگاه اسم مفرد به (x-ch-s-z-sh) ختم شود در جمع es می‌گیرد.

مثال۱۵:

1.batch	بسته	**batches**	بسته‌ها
2. box	جعبه	**boxes**	جعبه‌ها
3. bus	اتوبوس	**buses**	اتوبوس‌ها

۳ـ اگر اسمی به "f" یا "fe" ختم شود در جمع به ves ختم می‌گردد.

مثال۱۶:

1. leaf	برگ	leaves	برگ‌ها
2. thief	دزد	thieves	دزدان
3. knife	چاقو	knives	چاقوها

نکته۹: اسامی زیر از قاعده ۳ مستثنی هستند و فقط s می‌گیرند.

1. gulf	خلیج	2.handkerchief	دستمال	3. fife	فلوت
4. safe	صندوق آهنی	5. oaf	بچه ناقص	6. chief	رییس
7. strife	نزاع	8. grief	اندوه	9.serf	بنده
10. belief	اعتقاد	11. roof	پشت‌بام	12. hoof	سُم
13. reef	صخره	14. dwarf	کوتوله	15. proof	مدرک
16. cliff	پرتگاه	17. cuff	سرآستین	18. plaintiff	مدعی
19. mischief	نگون‌بختی	20. relief	آسودگی		

۴ـ اگر اسمی به "y" ختم شود و قبل از "y" یک حرف بی‌صدا بیاید، "y" در جمع تبدیل به "ies" می‌شود.

مثال۱۷:

1. city	شهر	cities	شهرها
2. liability	بدهی	liabilities	بدهی‌ها
3. country	کشور	countries	کشورها

۵ـ اگر اسمی به "o" ختم شود و قبل از "o" یک حرف بی‌صدا بیاید، "o" تبدیل به "oes" می‌شود.

مثال۱۸:

1. potato	سیب‌زمینی	potatoes	سیب‌زمینی‌ها
2. hero	قهرمان	heroes	قهرمانان
3. tomato	گوجه‌فرنگی	tomatoes	گوجه‌فرنگی‌ها

نکته۱۰: اسامی زیر از قاعده ۵ مستثنی هستند و برای جمع بستن به آخر آنها فقط s اضافه می‌شود.

1. dynamo	دینام	2. solo	تک‌نوازی	3. fiasco	ناکامی
4. two	دو	5. silo	سیلو	6. photo	عکس
7. ditto	ایضاً	8. magneto	مغناطیس	9. embryo	جنین
10. piano	پیانو	11. ego	خویشتن	12. manifesto	بیانیه
13. soprano	صدایِ زیر	14. torso	بدنه مجسمه		

۶ـ اسامی زیر بی‌قاعده هستند و با تغییر در حروف صدادارشان جمع بسته می‌شوند:

مثال۱۹:

1. crisis	بحران	crises	بحران‌ها
2. basis	مبنا	bases	مبانی
3. dormouse	سنجابک	dormice	سنجابک‌ها
4. foot	پا	feet	پاها
5. footman	پیشخدمت	footmen	پیشخدمت‌ها
6. goose	غاز	geese	غازها
7. louse	شپش	lice	شپش‌ها
8. mouse	موش	mice	موش‌ها
9. man	مرد	men	مردان
10. tooth	دندان	teeth	دندان‌ها
11. woman	زن	women	زنان