فصل اول

«فضاهای اقلیدسی»

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ نمونه اصلی منیفلدها به‌حساب می‌آید، نه‌تنها ساده‌ترین بلکه هر منیفلد به طور موضعی همانند $\mathbb{R}^n$ است. درک قوی از فضای $\mathbb{R}^n$ می‌تواند ضروری باشد؛ زیرا هدف تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به یک منیفلد است.

ویژگی مخصوص یک فضای اقلیدسی این است که دارای مجموعه‌ای از مختصات سراسری استاندارد است. این ویژگی هم ارزشمند است و هم می‌تواند یک نقص به شمار آید. ارزشمند از آن جهت که تمام ساختارهای روی $\mathbb{R}^n$ قابل تعیین برحسب مختصات استاندارد هستند و تمام محاسبات به سادگی قابل انجام است و نقص از آن جهت که تعریف برحسب یک مختصات نمی‌تواند چندان آشکارساز باشد که کدام مفاهیم ذاتی و مستقل از مختصات هستند. از آنجا که یک منیفلد در حالت کلی دارای مختصات استاندارد نمی‌باشد، تنها مفاهیم مستقل از مختصات قابل درک خواهند بود. برای مثال، واضح است روی یک منیفلد $n-$بُعدی به‌دست آوردن انتگرال یک تابع ممکن نیست زیرا انتگرال وابسته به مختصات می‌باشد. آنچه قابل انتگرال‌گیری است، فرم‌های دیفرانسیل هستند. هدف ما در این فصل نگاه دوباره به حساب دیفرانسیل و انتگرال روی $\mathbb{R}^n$ به شیوه مستقل از مختصات است که می‌تواند برای تعمیم به منیفلدها مفید واقع شود. در راستای این هدف، به بردار مماس نه مانند یک پیکان و نه مانند یک ستون از اعداد، بلکه همانند یک مشتق از تابع نگاه می‌کنیم.

توابع هموار روی یک فضای اقلیدسی

حساب دیفرانسیل توابع هموار ابزار اولیه ما در مطالعه منیفلدهای با ابعاد بالاتر است. به همین دلیل است که نگاهی دوباره به توابع هموار روی $\mathbb{R}^n$ خواهیم داشت.

$x^1,\dots,x^n$ را به عنوان مختصات روی $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته و فرض کنید $p=(p^1,\dots,p^n)$ نقطه‌ای از مجموعه باز U در $\mathbb{R}^n$ باشد. جهت حفظ تبادل با هندسه دیفرانسیل، اندیس‌های مختصات به صورت برنویس هستند و نه زیرنویس. تشریح قوانین مربوط به برنویس‌ها و زیرنویس‌ها در انتهای فصل دوم آمده است.

❖**تعریف ۱.** فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی باشد. تابع حقیقی ـ مقدار $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ در نقطه p را C^k می‌نامند هرگاه مشتقات جزئی $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_j}}$ برای تمام $j\le k$ وجود داشته و همچنین در p پیوسته باشند. تابع $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ در نقطه $p\in U$، C^∞ نامیده می‌شود اگر برای هر $k\ge 0$ این تابع C^k باشد؛ به عبارت دیگر، مشتقات جزئی $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_j}}$ از تمامی مرتبه‌ها در p موجود و پیوسته باشند. تابع برداری‌ـ مقدار $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^m$ در نقطه‌ی p را C^k می‌نامند هرگاه توابع $f^1,\dots,f^m$ در نقطه p همگی C^k باشند. گوییم تابع f روی U، C^k است اگر برای هر نقطه دلخواه در U، C^k باشد. تعریف مشابه برای یک تابع C^∞ روی مجموعه باز U نیز برقرار است. می‌توانیم به جای C^∞ از عبارت «**هموار**» نیز استفاده کنیم.

مثال۱: برای تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & x\neq 0\\ \text{تعریف نشده} & x=0\end{cases}$$

که نشان می‌دهد این تابع در نقطه 0 پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد. اینک تابع $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}.$$

واضح است $g'(x)=x^{\frac{1}{3}}$ و در نتیجه $g(x)$ در نقطه $x=0$، C^1 است، اما C^2 نمی‌باشد.

نکته۱: چندجمله‌ای‌ها، سینوس، کسینوس و توابع نمایی روی خط حقیقی همگی هموار هستند.

نکته۲: واضح است که اگر $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع $g(x)=\int_0^x t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ باشد و متناظر با آن تابع $h(x)=\int_0^x g(t)dt$ را تعریف کنیم، این تابع در نقطه صفر C^2 است، اما C^3 نیست.

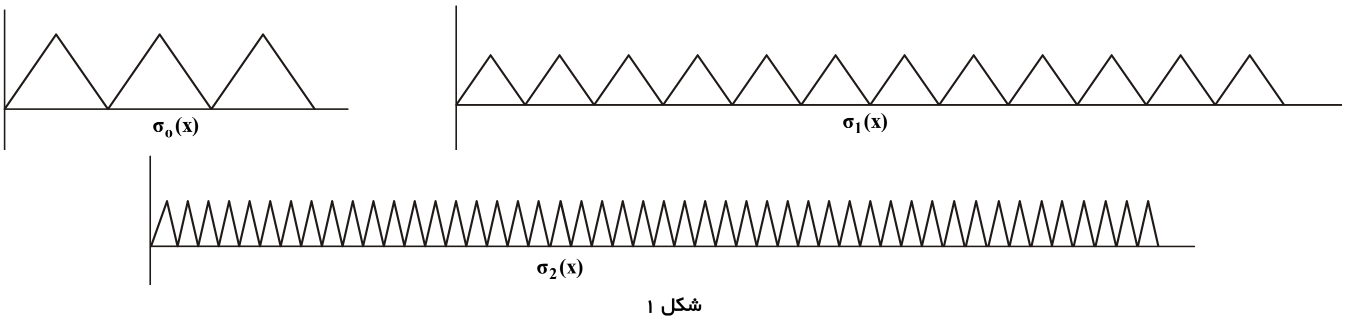
تذکر۱: اگرچه بسیاری از توابع پیوسته مانند $|x|$، $\sqrt[3]{x}$ و $x\sin(\frac{1}{x})$ در تعداد نقاط کمی فاقد مشتق‌پذیری هستند، اما کاملاً شگفت‌انگیز است که می‌توان تابعی یافت که در همه جا پیوسته، ولی هیچ‌جا مشتق‌پذیر است.

مثال۲: تابع پیوسته $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ وجود دارد که در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

ساختار این تابع مربوط به وایرشتراس است. حروف k، m و n نشان‌دهنده اعداد صحیح هستند. کار را با تابع دندانه‌ای‌شکل $\sigma_0:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ شروع می‌کنیم:

$$\sigma_0(x)=\begin{cases}x-2n & 2n\le x\le 2n+1,\\ 2n+2-x & 2n+1\le x\le 2n+2.\end{cases}$$

تابع σ_0 یک تابع متناوب با دوره تناوب ۲ است؛ اگر $t=x+2m$، آن‌گاه $\sigma_0(t)=\sigma_0(x)$. تابع دندانه‌ای شکل متراکم $\sigma_k(x)=(\frac{3}{4})^k\sigma_0(4^k x)$ دارای دوره تناوب $\pi_k=\frac{2}{4^k}$ است؛ اگر $t=x+m\pi_k$، آن‌گاه $\sigma_k(t)=\sigma_k(x)$. شکل ۱ را مشاهده کنید.



شکل ۱

بنابر آزمون وایرشتراس که بیان می‌کند اگر $\sum M_k$ یک سری همگرا از ثابت‌ها باشد و f_k در شرط $\|f_k\|\le M_k$ صدق کند، آن‌گاه $\sum f_k$ دارای همگرایی مطلق و همگرایی یک‌شکل است؛ سری $\sum\sigma_k(x)$ همگرای یک‌شکل به حد f بوده و $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k(x)$ پیوسته می‌باشد. ادعا می‌کنیم f همه‌جا مشتق‌ناپذیر است. نقطه دلخواه x را ثابت در نظر بگیرید و قرار دهید $\delta_n=\frac{1}{2}\cdot 4^n$. نشان خواهیم داد که نسبت $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x\pm\delta_n)-f(x)}{\delta_n}$ برای $\delta_n\longrightarrow 0$ به هیچ مقداری همگرا نیست، بنابراین $f'(x)$ وجود ندارد. داریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_k(x\pm\delta_n)-\sigma_k(x)}{\delta_n}.$$

سه نوع جمله در سری بالا وجود دارد، $k>n$، $k=n$ و $k<n$. اگر $k>n$، آن‌گاه تساوی $\sigma_k(x\pm\delta_n)-\sigma_k(x)=0$ برقرار است و δ_n یک ضریب صحیح از دوره σ_k است:

$$\delta_n=\frac{1}{2.4^n}=4^{k-(n+1)}\cdot\frac{2}{4^k}=4^{k-(n+1)}\times\pi_k\,.$$

بنابراین نمایش سری نامتناهی جمله $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ به $n+1$ جمله تقلیل می‌یابد:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sigma_n(x\pm\delta_n)-\sigma_n(x)}{\delta_n}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sigma_k(x\pm\delta_k)-\sigma_k(x)}{\delta_k}\,.$$

تابع σ_n روی $[x-\delta_n,x]$ و یا $[x,x+\delta_n]$ یکنوا است. از آن‌جا که روی بازه‌های با طول 4^{-n} یکنوا است و بازه پیوسته $[x-\delta_n,x+\delta_n]$ دارای طول 4^{-n} می‌باشد، شیب σ_n برابر $\pm3^n$ است. بنابراین، داریم:

$$\left|\frac{\sigma_n(x+\delta_n)-\sigma_n(x)}{\delta_n}\right|=3^n\quad \text{یا}\quad \left|\frac{\sigma_n(x-\delta_n)-\sigma_n(x)}{\delta_n}\right|=3^n.$$

جملات با $k<n$ به صورت زیر تخمین زده می‌شوند:

$$\left|\frac{\sigma_k(x\pm\delta_k)-\sigma_k(x)}{\delta_k}\right|\le 3^k.$$

بنابراین:

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|\ge 3^n-(3^{n-1}+\dots+1)=3-\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n+1),$$

که اگر $\delta_n\longrightarrow 0$ میل کند این مقدار به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و $f'(x)$ موجود نمی‌باشد.

یک **همسایگی** از نقطه p در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز شامل آن نقطه است. تابع f در نقطه p **حقیقی ـ تحلیلی** است اگر در یک همسایگی از p برابر با سری تیلورش باشد:

$$f(x)=f(p)+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i-p^i)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)(x^i-p^i)(x^j-p^j)$$

$$+\dots+\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}(p)(x^{i_1}-p^{i_1})\dots(x^{i_k}-p^{i_k})+\dots\,.$$

یک تابع حقیقی ـ تحلیلی الزاماً هموار است زیرا در آنالیز حقیقی یاد گرفتیم که از یک سری توانی همگرا می‌توان در ناحیه همگرایی آن جمله به جمله مشتق گرفت. برای مثال اگر داشته باشیم:

$$f(x)=\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots,$$

آن‌گاه مشتق‌گیری جمله به جمله می‌دهد:

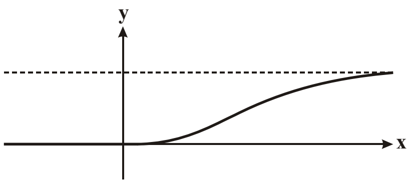
$$f'(x)=\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\dots\,.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که یک تابع C^∞ الزاماً حقیقی ـ تحلیلی نیست.

مثال:۳: تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & x>0,\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$$

شکل ۲ نمایش هندسی این تابع است. بنابر استقرا می‌توان نشان داد f روی $\mathbb{R}$ هموار است و مشتق‌های $f^k(0)$ برای تمام $k\ge 0$ برابر صفر است. سری تیلور این تابع در همسایگی مبدأ صفر است؛ زیرا تمام مشتق‌های $f^k(0)$ برابر صفر می‌باشد؛ بنابراین، $f(x)$ نمی‌تواند برابر سری تیلور خود باشد و متعاقباً $f(x)$ حقیقی ـ تحلیلی در 0 نیست.

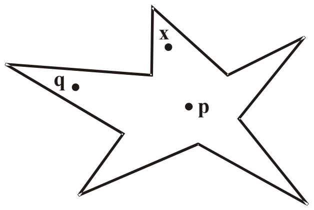


شکل۲

قضیه تیلور با باقیمانده

اگرچه نیاز نیست یک تابع C^{∞} برابر با سری تیلور خود باشد، قضیه تیلور با باقیمانده برای توابع هموار وجود دارد که اغلب برای اهداف ما کافی می‌باشد.

گوییم زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^n$ **ستاره ـگون** برحسب نقطه p در S است اگر برای هر x متعلق به S، پاره‌خط از p به x در S قرار گرفته باشد. شکل۳ ستاره ـگون برحسب p است، اما برحسب q ستاره ـگون نیست.

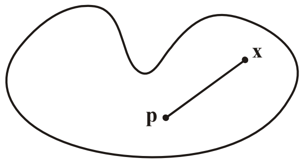


شکل۳

لم۱: (قضیه تیلور با باقیمانده). فرض کنید f یک تابع هموار روی زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ باشد که U برحسب $p=(p^1,\dots,p^n)$ ستاره ـگون است. آن‌گاه توابع $g_1(x),\dots,g_n(x)\in C^{\infty}(U)$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$f(x)=f(p)+\sum_{i=1}^{n}(x^i-p^i)g_i(x) \quad , \qquad g_i(p)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

اثبات: از آن‌جا که U برحسب p ستاره ـ گون است، برای هر x در U پاره‌خط $p+t(x-p)\ ,\ 0\le t\le 1$ درون U قرار می‌گیرد (شکل ۴).



شکل ۴

بنابراین $f(p+t(x-p))$ برای $0\le t\le 1$ قابل تعریف است.

بنابر قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{d}{dt}f(p+t(x-p))=\sum(x^i-p^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p)).$$

اگر برحسب t از طرفین انتگرال از ۰ تا ۱ بگیریم، داریم:

$$f(p+t(x-p))\Big|_0^1=\sum(x^i-p^i)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))dt. \qquad (1)$$

فرض کنید:

$$g_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))dt,$$

آن‌گاه $g_i(x)$ هموار است و تساوی (۱) را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$f(x)-f(p)=\sum(x^i-p^i)g_i(x).$$

به‌علاوه:

$$g_i(p)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dt=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

و اثبات کامل می‌گردد.

در حالت $n=1$ و $p=0$، این لم بیان می‌کند:

$$f(x)=f(0)+xg_1(x)$$

که $g_1(x)$ یک تابع C^{∞} است. به‌کار بردن این لم به‌طور مکرر نتیجه می‌دهد:

$$g_i(x)=g_i(0)+xg_{i+1}(x),$$

که g_i و g_{i+1} توابعی هموار هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x)&=f(0)+x(g_1(0)+xg_2(x))\\ &=f(0)+xg_1(0)+x^2(g_2(0)+xg_3(x))\\ &\ \ \vdots\\ &=f(0)+g_1(0)x+g_2(0)x^2+\dots+g_i(0)x^i+g_{i+1}(x)x^{i+1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

با مشتق‌گیری مکرر و محاسبه آن در نقطه ۰ به‌دست می‌آید:

$$g_k(0)=\frac{1}{k!}f^k(0), \qquad k=1,2,\dots,i$$

بنابراین تابع (۲) بسط چندجمله‌ای $f(x)$ است که جملاتش تا آخرین جمله با سری تیلور $f(x)$ در نقطه ۰ یکسان می‌باشد.

➤ **توجه۱:** ستاره ـ گون بودن به معنی محدود کردن شرط نیست؛ زیرا هر گوی باز $B(p;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-p\|<\varepsilon\}$ برحسب p ستاره ـگون است.
اگر f یک تابع C^∞ تعریف‌شده روی مجموعه باز U حاوی p باشد، آن‌گاه یک $\varepsilon>0$ وجود دارد، به‌طوری که: $p\in B(p,\varepsilon)\subset U.$

نمادگذاری: به‌طور معمول، مختصات استاندارد روی $\mathbb{R}^2$ را با x,y نوشته و همچنین مختصات استاندارد روی $\mathbb{R}^3$ را با x,y,z می‌نویسیم.

مثال۴: فرض کنید g یک تابع دیفرانسیل پذیر روی مجموعه باز $U\subset\mathbb{R}^n$ بوده و همچنین فرض کنید U برحسب a ستاره ـ گون باشد. اگر روی U داشته باشیم $|\frac{\partial g}{\partial x^i}|<k$، آن‌گاه بنابر لم ۱ و بکار بردن نامساوی کشی ـ شوارتز داریم:

$$|g(x)-g(a)|=|\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial g}{\partial x^i})(x^i-a^i)|\le[\sum_i(\frac{\partial g}{\partial x^i})^2]^{\frac{1}{2}}[\sum_i(x^i-a^i)]^{\frac{1}{2}}$$

و از نامساوی بالا رابطه $|g(x)-g(a)|<k\sqrt{n}\,\|x-a\|$ برقرار است.

◆ ◆ ◆ ◆

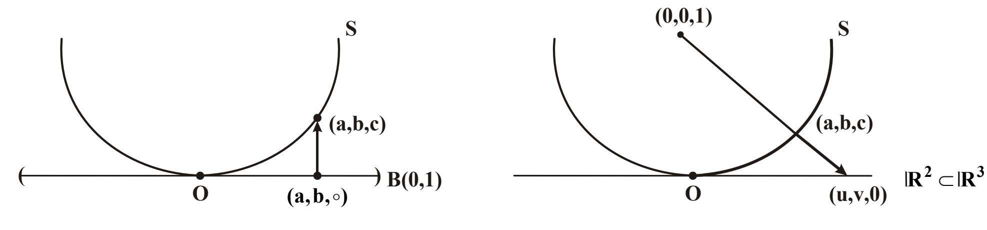
فرض کنید $U\subset\mathbb{R}^n$ و $V\subset\mathbb{R}^n$ دو زیرمجموعه باز باشند. نگاشت هموار $F:U\longrightarrow V$ **دیفئومورفیسم** نامیده می‌شود اگر دوسویی و دارای وارون هموار $F^{-1}:V\longrightarrow U$ باشد. به عنوان مثال از ریاضیات مقدماتی به یاد داریم، تابع‌های $f:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\tan x$ و همچنین $h:]a,b[\longrightarrow]-1,1[$ با ضابطه $h(t)=(\frac{\pi}{b-a})(t-a)-(\frac{\pi}{2})$ دیفئومورفیسم می‌باشند. با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد که $f\circ h:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ نیز یک دیفئومورفیسم است. به علاوه، به عنوان تعمیمی از تابع‌های ارائه شده می‌توان مشاهده کرد:

$$f:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\quad f(x_1,...,x_n)=(\tan x_1,...,\tan x_n)$$

نیز یک دیفئومورفیسم است.

اینک می‌خواهیم یک گوی باز در صفحه را به خود صفحه دیفئومورف کنیم که با ایده مفاهیم پیشین قابل تعمیم به $\mathbb{R}^n$ نیز می‌باشد. فرض کنید $O=(0,0)$ نشان دهنده مبدأ و $B(0,1)$ دیسک واحد باز در $\mathbb{R}^2$ باشد. برای یافتن یک دیفئومورفیسم بین $B(0,1)$ و $\mathbb{R}^2$، ابتدا $\mathbb{R}^2$ را با صفحه xy در $\mathbb{R}^3$ یکی در نظر گرفته و سپس نیم کره باز پایینی را در $\mathbb{R}^3$ معرفی می‌کنیم (شکل ۵).

$$S:x^2+y^2+(z-1)^2=1\quad,\quad z<1,$$



شکل ۵

ابتدا دقت شود نگاشت زیر دوسویی است:

$$f:B(0,1)\longrightarrow S\quad,\quad (a,b)\longrightarrow(a,b,1-\sqrt{1-a^2-b^2}).$$

تصویر ستریوگرافیک $g:S\longrightarrow\mathbb{R}^2$ از $(0,0,1)$ نگاشتی است که نقطه $(a,b,c)\in S$ را به اشتراک خط گذرنده از $(0,0,1)$ و (a,b,c) با صفحه xy انتقال می‌دهد که ضابطه این نگاشت به فرم زیر است:

$$(a,b,c)\longrightarrow(u,v)=(\frac{a}{1-c},\frac{b}{1-c}),\quad c=1-\sqrt{1-a^2-b^2},$$

و دارای وارون زیر نیز می‌باشد:

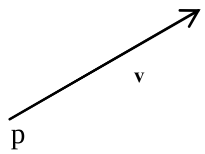
$$(u,v)\longrightarrow(\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}},1-\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}).$$

حال، ترکیب دو نگاشت f و g نگاشت دوسویی h را می‌دهد:

$$h = g \circ f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \quad h(a,b) = \left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\right).$$

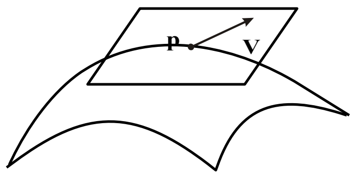
بنابراین h یک دیفئومورفیسم بین دیسک واحد باز با صفحه $\mathbb{R}^2$ برقرار می‌کند.

بردارهای مماس در $\mathbb{R}^n$ به عنوان مشتق‌ها



شکل ۶

در حساب‌های مقدماتی به طور معمول یک بردار در نقطه p درون $\mathbb{R}^3$ را به صورت جبری با ستون اعداد $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم و یا با نگاه هندسی، متناظر با یک پیکان شروع‌شونده از p در نظر گرفته می‌شود (شکل ۶).



شکل ۷

یادآوری۱: صفحه قاطع به یک رویه در $\mathbb{R}^3$ یک صفحه‌ی مشخص شده با سه نقطه از رویه است. هنگامی که این سه نقطه به نقطه p از رویه نزدیک می‌شوند، حد صفحات متقاطع را صفحه مماس بر رویه در نقطه p می‌نامند. به طور شهودی، صفحه مماس بر یک رویه در نقطه p، صفحه‌ای در $\mathbb{R}^3$ است که رویه را در نقطه p فقط «لمس» می‌کند. یک بردار در نقطه p مماس بر یک رویه در $\mathbb{R}^3$ است اگر در صفحه مماس آن در نقطه p قرار گرفته باشد (شکل ۷).

چنین تعریفی از بردار مماس بر یک رویه مبتنی‌بر این پیش فرض است که رویه در یک فضای اقلیدسی نشانده شده باشد. بنابراین، این تعریف برای یک صفحه‌ی تصویر (افکنشی) نمی‌تواند چندان کارساز باشد؛ یعنی رویه‌ای که به روش طبیعی در $\mathbb{R}^n$ نمی‌نشیند.

➢ **توجه۲:** صفحه افکنشی همان $\mathbb{R}P^2$ است که در ادامه بیشتر از آن صحبت خواهد شد.

هدف ما در این بخش یافتن ویژگی‌هایی از بردارهای مماس در $\mathbb{R}^n$ است که قابل تعمیم به منیفلدها خواهند بود.

مشتق سویی

در حساب دیفرانسیل و انتگرال تصور ما از فضای $T_p(\mathbb{R}^n)$ در نقطه p درون $\mathbb{R}^n$ فضای برداری تمام پیکان‌های شروع‌شونده از p است. با تناظری که بین پیکان‌ها و بردارهای ستونی وجود دارد، فضای برداری $\mathbb{R}^n$ می‌تواند با فضای ستونی اعداد یکی شود. برای تمیز دادن نقطه‌ها از بردارها، یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ را به صورت $p = (p^1, \ldots, p^n)$ و یک بردار در فضای مماس $T_p(\mathbb{R}^n)$ را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \langle v^1, \ldots, v^n \rangle .$$

به طور معمول، پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ یا $T_p(\mathbb{R}^n)$ را با $e_1, \ldots, e_n$ نمایش می‌دهیم، همچنین قرار می‌دهیم $v = \sum v^i e_i$ برای $v^i \in \mathbb{R}^n$. عناصر فضای $T_p(\mathbb{R}^n)$ بردارهای مماس (یا بردارهای) در p نامیده می‌شوند. گاهی از نوشتن پرانتز خودداری کرده و از $T_p\mathbb{R}^n$ به عنوان یک شکل نوشتاری دیگر برای $T_p(\mathbb{R}^n)$ استفاده می‌کنیم.

خط شروع‌شده از نقطه $p = (p^1, \ldots, p^n)$ در راستای $v = \langle v^1, \ldots, v^n \rangle$ در $\mathbb{R}^n$ دارای پارامتری‌سازی زیر است:

$$c(t) = (p^1 + tv^1, \ldots, p^n + tv^n).$$

مؤلفه‌ی iاُم $c^i(t)$ مقدار $p^i + tv^i$ است. اگر تابع f در یک همسایگی از p درون $\mathbb{R}^n$، C^∞ باشد و همچنین v یک بردار مماس در p باشد، **مشتق سویی** f در نقطه p در راستای v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t)).$$

با به کار بردن قاعده‌ی زنجیری داریم:

$$D_v f = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc^i}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \qquad (۳)$$

در نمادگذاری $D_v f$، واضح است که مشتقات جزئی در نقطه p ارزیابی می‌شود، از آنجا که v یک بردار در p است؛ پس $D_v f$ یک عدد است و نه یک تابع. به‌علاوه،

$$D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

نگاشتی است که تابع f را به عدد $D_v f$ انتقال می‌دهد. برای ساده‌سازی اغلب از نوشتن p خودداری می‌کنیم. وابستگی مشتق سویی D_v به بردار مماس v این انگیزه را در ذهن ما به وجود می‌آورد که بردارهای مماس را همانند یک عملگر معینی روی توابع ببینیم. برای دقیق شدن در این همانندسازی، دو بخش آتی به مطالعه بیشتر مشتق سویی D_v به عنوان یک عملگر روی توابع می‌پردازند.

جرم‌های توابع

یک **رابطه** روی مجموعه S یک زیرمجموعه R از $S \times S$ است. برای x و y داده‌شده در S می‌نویسیم $x \sim y$، اگر و تنها اگر $(x,y) \in R$. رابطه R یک **رابطه هم‌ارزی** است، اگر برای تمام $x, y, z \in S$ داشته باشیم:

(i) (بازتابی) $x \sim x$،

(ii) (تقارنی) اگر $x \sim y$، آن‌گاه $y \sim x$،

(iii) (تعدی) اگر $x \sim y$ و $y \sim z$، آن‌گاه $x \sim z$.

از آنجا که اگر دو تابع که روی یک همسایگی از p برابر باشند، دارای مشتق سویی یکسانی نیز هستند، این انگیزه ایجاد می‌شود که به معرفی یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی توابع C^∞ تعریف‌شده در یک همسایگی از p بپردازیم. مجموعه‌ی تمام زوج‌های (f,U) که U یک همسایگی از p و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع C^∞ است را در نظر بگیرید، گوییم (f,U) هم‌ارز (g,V) است اگر مجموعه باز $W \subset U \cap V$ شامل p وجود داشته باشد به طوری که با تحدید به W داشته باشیم $f = g$. به وضوح این یک رابطه هم‌ارزی است زیرا بازتابی، تقارنی و تعدی است. کلاس هم‌ارزی (f,U) **جرم** f در p نامیده می‌شود. مجموعه تمام جرم‌های توابع C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ در p را با $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ یا در صورتی که ابهامی به وجود نیاید با C_p^∞ نشان می‌دهیم.

نکته۳: توابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ و $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ با دامنه بازه باز (۱ و ۱-) دارای جرم یکسانی در هر نقطه p درون بازه باز (۱ و ۱-) هستند.

یک **جبر** روی میدان K یک فضای برداری A روی K به همراه یک نگاشت ضربی $\mu : A \times A \longrightarrow A$ است (که معمولاً به صورت $\mu(a,b) = a.b$ نوشته می‌شود) چنانچه برای هر $a,b,c \in A$ و $r \in K$ داشته باشیم:

(i) (شرکت‌پذیری) $(a.b).c = a.(b.c)$،

(ii) (توزیع‌پذیری) $(a+b).c = a.c + b.c$ و $a.(b+c) = a.b + a.c$،

(iii) (همگنی) $r(a.b) = (ra).b = a.(rb)$.

به طور معادل، یک جبر روی میدان K حلقه A (یکدار یا بدون یکه) است به‌طوری که یک فضای برداری روی K نیز باشد و به‌علاوه ضرب حلقه در شرط همگنی (iii) صدق کند. بنابراین یک جبر دارای سه عملگر: جمع، ضرب حلقه و ضرب اسکالر است. معمولاً علامت ضرب نادیده گرفته شده و ab به جای $a.b$ نوشته می‌شود.

نگاشت $L : V \longrightarrow W$ بین فضاهای برداری روی میدان K یک **نگاشت خطی** یا یک **عملگر خطی** نامیده می‌شود اگر برای هر $r \in K$ و $u, v \in V$ داشته باشیم:

(i) $L(u+v) = L(u) + L(v)$؛

(ii) $L(rv) = rL(v)$.

توجه۳: برای اهمیت دادن به اینکه اسکالرها در میدان K قرار گرفته‌اند، چنین نگاشتی را K– **خطی** نیز می‌نامند.

اگر A و A' جبرهای روی میدان K باشند، یک **هومورفیسم جبری** نگاشت خطی $L:A\longrightarrow A'$ است به طوری که تساوی $L(ab)=L(a)L(b)$ برای هر $a,b\in A$ برقرار باشد.

نکته۴: جمع و ضرب توابع، از C_p^∞ روی میدان $\mathbb{R}$ یک جبر می‌سازد.

مشتقات در یک نقطه

برای هر بردار مماس v در نقطه p درون $\mathbb{R}^n$، مشتق سویی در p یک نگاشت از فضای برداری حقیقی را می‌دهد: $D_v:C_p^\infty\longrightarrow\mathbb{R}.$

با استفاده از (۳)، D_v یک نگاشت $\mathbb{R}$ـ خطی است و در قاعده لایبنیتز صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$D_v(fg)=(D_vf)g(p)+f(p)D_vg. \tag{۴}$$

واضح است که مشتقات جزئی $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ دارای این خاصیت هستند.

در حالت کلی، هر نگاشت خطی $D:C_p^\infty\longrightarrow\mathbb{R}$ که در قاعده لایبنیتز معادله (۴) صدق کند، یک **مشتق‌گیری** در نقطه p یا یک **مشتق‌گیری نقطه‌ای** از C_p^∞ نامیده می‌شود. مجموعه تمام مشتق‌گیری‌های در p را با $\mathfrak{D}_p(\mathbb{R}^n)$ نمایش می‌دهیم.

نکته۵: مجموعه $\mathfrak{D}_p(\mathbb{R}^n)$ یک فضای برداری حقیقی است.

همانطورکه می‌دانیم، مشتقات سویی در p همگی مشتق‌گیری‌های در p هستند، بنابراین نگاشت زیر وجود دارد:

$$\phi:T_p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathfrak{D}_p(\mathbb{R}^n)\qquad v\longrightarrow D_v=\sum v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\ , \tag{۵}$$

از آنجا که D_v در v خطی است، نگاشت ϕ یک نگاشت خطی فضاهای برداری است.

لم۲: اگر D یک مشتق‌گیری نقطه‌ای C_p^∞ باشد، آن‌گاه برای هر تابع ثابت c داریم $D(c)=0$.

اثبات: از آنجا که نمی‌دانیم آیا هر مشتق‌گیری در p یک مشتق سویی است، برای اثبات نیاز است تنها از خاصیت‌های تعریف مشتق‌گیری در p استفاده کنیم.

با استفاده از $\mathbb{R}-$خطی بودن داریم $D(c)=cD(1)$. بنابراین کافی است ثابت کنیم $D(1)=0$. با به کار بردن قاعده لایبنیتز داریم:

$$D(1)=D(1.1)=D(1).1+1.D(1)=2D(1).$$

با منها کردن $D(1)$ از دو طرف خواهیم داشت $D(1)=0$.

دلتای کرونکر، نمادگذاری مفیدی است که بسیار مورد استفاده واقع می‌شود:

$$\delta_j^i=\begin{cases}1 & i=j\ ,\\ 0 & i\neq j\ .\end{cases}$$

قضیه۱: نگاشت خطی $\phi:T_p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathfrak{D}_p(\mathbb{R}^n)$ تعریف‌شده در (۵) در یک نقطه یکریختی فضاهای برداری است.

اثبات: برای اثبات یک به یک بودن، فرض کنید $D_v=0$. برای هر $v\in T_p(\mathbb{R}^n)$ اثر D_v روی تابع مختص x^j می‌دهد:

$$0=D_v(x^j)=\sum v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\ x^j=\sum v^i\delta_j^i=v^j\ .$$

بنابراین، $v=0$ و ϕ یک به یک است.

برای اثبات پوشایی، فرض کنید D یک مشتق‌گیری در p بوده و (f,V) نشانگر یک جرم در C_p^∞ باشد. در صورت نیاز با کوچک گرفتن V می‌توان فرض کرد V یک گوی باز و در نتیجه ستاره‌ـگون است. قضیه تیلور با باقیمانده بیان می‌کند که توابع C^∞ مانند $g_i(x)$ در همسایگی p وجود دارند چنانچه:

$$f(x)=f(p)+\sum(x^i-p^i)g_i(x),\qquad g_i(p)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=0.$$

با اعمال D روی دو طرف و این نکته که $D(f(p))=0$ و $D(p^i)=0$ و دقیق شدن روی قاعده لایبنیتز داریم:

$$Df(x)=\sum(Dx^i)g_i(p)+\sum(p^i-p^i)D_{g_i}(x)=\sum(Dx^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

این ثابت می‌کند که تساوی $D=D_v$ برای $v=\langle Dx^1,\dots,Dx^n\rangle$ برقرار است و اثبات کامل می‌شود.

این قضیه نشان می‌دهد که ممکن است بردارهای مماس در p با مشتق‌گیری‌های در p یکی شوند. تحت یکریختی فضای برداری $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathfrak{D}_p(\mathbb{R}^n)$، پایه استاندارد $e_1,\dots,e_n$ برای $T_p(\mathbb{R}^n)$ متناظر با مجموعه مشتق‌های جزئی $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ است.

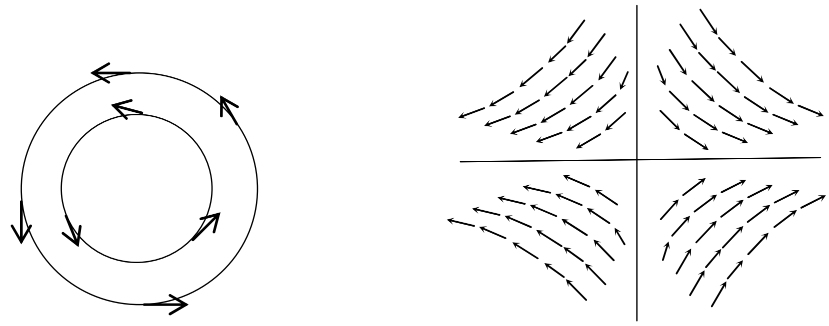
از این به بعد، بردار مماس $v = \langle v^1,\dots,v^n \rangle = \sum v^i e_i$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \quad . \tag{۶}$$

میدان‌های برداری

یک **میدان برداری** X روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ تابعی است که به هر نقطه p در U بردار مماس X_p در $T_p(\mathbb{R}^n)$ را تخصیص می‌دهد. از آنجا که $T_p(\mathbb{R}^n)$ دارای پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$است، بردار X_p به صورت ترکیب خطی $X_p = \sum a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \quad p \in U, \quad a^i(p) \in \mathbb{R}$ است. با حذف p می‌نویسیم $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ که a_iها توابع روی U هستند. گوییم میدان برداری X روی U، C^∞است اگر توابع ضریب a^i همگی توابعی C^∞ روی U باشند.

مثال۵: روی $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ فرض کنید $p = (x,y)$، آن‌گاه $X = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} = \langle \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \rangle$ میدان برداری در شکل ۸ (ب) است. میدان برداری $Y = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} = \langle x,-y \rangle$ نیز در شکل ۸ (الف) ترسیم شده است.



(ب) میدان برداری X روی $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

(الف) میدان برداری $\langle x,-y \rangle$ روی $\mathbb{R}^2$

شکل ۸

می‌توان میدان‌های برداری روی U را با بردارهای ستونی از توابع C^∞ روی U یکی گرفت:

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}.$$

حلقه توابع C^∞ روی مجموعه باز U عموماً با $C^\infty(U)$ یا $\mathcal{F}(U)$ نشان داده می‌شود. ضرب نقطه به نقطه میدان‌های برداری و توابع روی U به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$(fX)_p = f(p)X_p \ , \ p \in U$$

واضح است، اگر $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری C^∞ باشد و f نیز یک تابع C^∞، آن‌گاه $fX = \sum (fa^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری C^∞ روی U است.

نکته۶: مجموعه میدان‌های برداری C^∞ روی U، نشان داده شده با $\mathfrak{X}(U)$، نه‌تنها یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است، بلکه یک **مدول** روی حلقه $C^\infty(U)$ نیز می‌باشد. در اینجا به بازگویی تعریف یک مدول خواهیم پرداخت.

❖ **تعریف۲:** اگر R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، یک **R- مدول (چپ)** یک گروه آبلی A با نگاشت ضرب اسکالر $\mu : R\times A \longrightarrow A$ است، که معمولاً به صورت $\mu(r,a)=ra$ نوشته می‌شود، چنانچه برای تمام $r,s\in R$ و $a,b\in A$ شرایط زیر برقرار باشد:

(i) (شرکت‌پذیری) $(rs)a=r(sa)$،

(ii) (یکه) اگر ۱ یک ضربی در R باشد، آن‌گاه $1a=a$،

(iii) (توزیع‌پذیری) $r(a+b)=ra+rb$ ، $(r+s)a=ra+sa$

❖ **تعریف۳:** فرض کنید A و A' دو R- مدول باشند. یک **هم‌ریختی R- مدولی** از A به A' نگاشت $f:A\longrightarrow A'$ است که جمع و ضرب اسکالر را حفظ می‌کند؛ یعنی برای هر $a,b\in A$ و $r\in R$ داشته باشیم:

(i) $f(a+b)=f(a)+f(b)$،

(ii) $f(ra)=rf(a)$.

میدان‌های برداری به عنوان مشتق‌گیری‌ها

اگر X یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ و f یک تابع C^∞ روی U باشد، تابع جدید Xf روی U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(Xf)(p)=X_pf \qquad \forall p\in U .$$

با نوشتن $X=\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ داریم:

$$Xf=\sum a^i\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad \text{یا} \qquad (Xf)(p)=\sum a^i(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

که نشانگر آن است Xf یک تابع C^∞ روی U است، بنابراین هر میدان برداری C^∞ مانند X یک نگاشت R- خطی را نتیجه می‌دهد:

$$C^\infty(U)\longrightarrow C^\infty(U) \quad f\longrightarrow Xf.$$

نکته۷: اگر X یک میدان برداری C^∞ بوده و همچنین f و g توابعی C^∞ روی یک زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ باشند، آن‌گاه $X\ \ (fg)$ در قاعده ضرب (قاعده لایبنیتز) صدق می‌کند:

$$X(fg)=(Xf)g+fXg.$$

اگر A یک جبر روی میدان K باشد، یک **مشتق‌گیری** A نگاشت K- خطی $D:A\longrightarrow A$ است چنانچه:

$$D(ab)=(Da)b+aD(b)\ ,\ \forall a\ ,\ b\in A .$$

مجموعه تمام مشتق‌گیری‌های A تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است و تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که با $\mathrm{Der}(A)$ نشان داده می‌شود. همانطور که در بالا گفته شد، یک میدان برداری C^∞ روی مجموعه باز U یک مشتق‌گیری از جبر $C^\infty(U)$ را نتیجه می‌دهد، بنابراین داریم:

$$\phi:\mathfrak{X}(U)\longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(U)) \quad , \quad X\longrightarrow(f\longrightarrow Xf).$$

تنها از آن جهت که بردارهای مماس در نقطه p می‌توانند با مشتق‌گیری‌های نقطه‌ای C_p^∞ یکی شوند، میدان‌های برداری روی مجموعه باز U می‌توانند با مشتق‌گیری‌های جبر $C^\infty(U)$ یکی شوند؛ یعنی، نگاشت ϕ یکریختی فضاهای برداری است. یک به یک بودن ϕ ساده است، هر چند پوشا بودن آن نیازمند کار بیشتری است (مسئله ۱۳ از مسائلی برای چالش بیشتر در فصل دهم مشاهده شود).

نکته۸: دقت شود یک مشتق‌گیری در p با مشتق‌گیری از جبر C_p^∞ یکی نیست. یک مشتق‌گیری در p نگاشت از C_p^∞ به $\mathbb{R}$ است، در حالی که مشتق‌گیری از جبر C_p^∞ یک نگاشت از C_p^∞ به C_p^∞ است (فصل دهم مسائلی برای چالش بیشتر مسئله ۱۳).