مدرسان شریف

«پیش‌گفتار»

آشنایی با معنی و مفهوم «سیستم‌های کنترل خطی» بیش از هر چیز به آشنایی با تک‌تک واژه‌های به‌کار رفته در نام‌گذاری این درس و این کتاب برمی‌گردد. برای بهره‌وری هرچه بیشتر از مطالعه یک کتاب اولین گام برقراری ارتباط منطقی با نام کتاب، ساختار آن و ترتیب مطالعه هر فصل است. به این ترتیب با نگاه به فهرست مطالب و سرفصل‌های ارائه شده به راحتی می‌توان پیش از مطالعه کتاب به یک درک نسبی صحیح از هدف، محتوا و حتی کیفیت مطالب ارائه شده رسید. برای فهم موضوعاتی که برایمان پیچیده است از مثال‌های ساده‌تر کمک می‌گیریم. استفاده از مثال‌هایی که به نوعی برای ما شناخته شده‌تر هستند فهم مطالب، قدرت پیش‌بینی و تعمیم را نیز در شرایطی که تصمیم‌گیری برایمان دشوار است به شدت افزایش می‌دهد.

آشنایی با سیستم‌های کنترل خطی نیز به همین ترتیب می‌تواند بسیار ساده‌تر و عمیق‌تر از آنچه به طور معمول تصور می‌شود باشد. با درک عمیق معانی و مفاهیم مطرح در این درس بسیاری از پرسش‌های متداول پاسخی بسیار ساده و واضح خواهند داشت. اما چگونه!؟

برای مثال همه می‌دانیم که هر بیماری یا رفتار بیمارگونه به خارج شدن از حالت طبیعی اشاره دارد. به شرطی که البته در حالت طبیعی هم بیمار نباشیم!

اهمیت سیستم‌های کنترل نیز زمانی مشخص می‌شود که سیستمی از حالت طبیعی و مطلوب عملکرد خود خارج شود.

درمان هر بیماری به طور طبیعی ابتدا نیاز به شناخت نوع بیماری و علل اصلی آن خواهد داشت. باید بتوان بیماری‌های معمول را ریشه‌یابی کرد، نحوه تأثیر آن‌ها را بر اجزای مختلف بدن بیمار مطالعه نمود و راهکار مناسب برای درمان آن بیماری را به‌گونه‌ای ارائه داد که کمترین تأثیر منفی بر سایر اعضای بدن داشته باشد.

این مهم‌ترین نقطه قوت رویکرد طب سنتی در برابر طب نوین نیز به‌حساب می‌آید. طب سنتی بدن را به عنوان یک کل می‌نگرد که تمام اجزاء و زیرسیستم‌های آن با یکدیگر در ارتباط هستند و از یکدیگر تأثیر می‌پذیرند. در حالی‌که طب نوین معمولاً به شکلی تخصصی اجزای بدن را مورد مطالعه و درمان قرار می‌دهد و با حمله به علّت بیماری در عضو بیمار سعی در بهبود آن دارد که البته ممکن است به سایر عضوها نیز آسیب برساند. همه‌ی داروهای امروزی عوارض جانبی شناخته‌شده‌ای نیز دارند و مصرف بی‌رویه آن‌ها ممکن است مضر باشد.

به‌طور کاملاً مشابهی عملکرد بسیاری از سیستم‌ها در حوزه‌های مختلف مهندسی یا علوم را می‌توان مورد مطالعه قرار داد. مادامی که سیستم رفتار طبیعی و مطلوب دارد نیاز به درمان ندارد و می‌توان گفت که سیستم کنترل تعبیه شده در آن سیستم وظیفه خود را به خوبی انجام می‌دهد.

اما اگر به هر دلیلی رفتار سیستم و عملکرد آن از حالت طبیعی خارج شود نیاز به کنترل دوباره و جبران‌سازی شرایط پیش آمده محسوس خواهد بود.

بدین منظور اولین گام، شناخت آن سیستم و نحوه رفتار آن و عوامل تأثیرگذار بر این رفتار است. طبیعی است که اگر صورت‌های مختلف بیماری‌ها و علت اصلی این بیماری‌ها را نشناسیم قادر به درمان آن‌ها نیز نخواهیم بود.

به همین دلیل اولین فصل در مطالعه‌ی هدفمند و صحیح در موضوع سیستم‌های کنترل خطی آشنایی با نمایش‌های مختلف سیستم و چگونگی ارتباط آن‌ها با یکدیگر خواهد بود، چنانچه در این کتاب پیشنهاد شده است. دقت کنید که یک بیماری در افراد مختلف به شکل‌های متفاوت بروز می‌کند و بنابراین شناخت تمامی حالت‌ها و شرایط ممکن از اهمیت بالایی برخوردار است. اهمیت فصل اول در آشنایی با نمایش‌های مختلف سیستم و ارتباط متقابل آن‌ها به منظور آشنایی با سیستم‌های کنترل خطی قابل مقایسه با اهمیت آشنایی با بدن انسان، آناتومی و فیزیولوژی عمومی است که نقطه شروع پزشکی عمومی است.

گام بعدی به‌طور طبیعی معاینه بیمار و تشخیص نوع بیماری و شدت آن است به‌طوری که بتوان بهترین تصمیم را برای درمان آن گرفت. در بحث سیستم‌های کنترل بیمار را با «سیستم جبران نشده» فرآیند یا مشابه‌سازی کنید و «جبران‌ساز» یا «کنترل‌کننده» را در حکم درمان و داروی تجویز شده برای بیماری درنظر بگیرید.

طبیعی است که انتظار داریم بیماری:

ـ از بین برود نه این‌که بیمار را از بین ببرد.

ـ هرچه زودتر از بین برود.

ـ کمترین لطمه را به بدن بیمار وارد کند.

ـ به‌طور کامل از بین برود به گونه‌ای که بیمار به شرایط طبیعی قبل از بیماری بازگردد.

ـ در نهایت این‌که پس از درمان همان بیماری یا شکل‌های تغییر یافته آن دوباره و در اثر کوچکترین تغییر شرایطی در بدن باز نگردد.

در بحث سیستم‌های کنترل خطی درست به همین ترتیب ابتدا به تحلیل یا معاینه سیستم جبران نشده می‌پردازیم که به «تحلیل حلقه باز» نیز معروف است. مهمترین گام همان‌طور که اشاره شد تحلیل پایداری است به‌طوری‌که اطمینان حاصل شود که شرایط ایجاد شده یا پیشنهاد شده برای درمان به پایداری سیستم آسیبی نمی‌رساند. پس از آن در تحلیل پاسخ گذرا سرعت و چگونگی عکس‌العمل سیستم در برابر شرایط ایجاد شده را بررسی می‌کنیم و در تحلیل پاسخ دائمی پیش‌بینی وضعیت نهایی سیستم پس از طی حالت گذرا و البته با فرض پایداری صورت خواهد پذیرفت. توجه کنید که معاینه بیمار ممکن است قبل از درمان یا پس از درمان صورت گیرد که در بحث سیستم‌های کنترل به ترتیب به تحلیل جبران نشده‌ی حلقه باز و تحلیل جبران شده‌ی حلقه بسته معروف است.

فصل‌های دوم تا چهارم کتاب با همین رویکرد منطقی شکل گرفته و پیشنهاد شده‌اند. درست همان‌گونه که با پیشرفت علم و فناوری روش‌های تصویربرداری پزشکی نظیر MRI، سونوگرافی و یا سی‌تی اسکن به ابزاری تصویری و بسیار قدرتمند در انجام معاینات پزشکی تبدیل شده‌اند، در بحث تحلیل سیستم‌های کنترل خطی نیز ابزارهای گرافیکی متفاوتی برای تحلیل جبران نشده و یا جبران شده معرفی و به شدت مورد استفاده قرار گرفتند. در حوزه زمان مکان هندسی ریشه‌ها به عنوان ابزار گرافیکی قدرتمند در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل و در حوزه فرکانس پاسخ فرکانسی در قالب نمودار قطبی، نمودار لگاریتم دانه بر حسب فاز (نیکولز) و نمودار Bode به عنوان ابزار گرافیکی با هدف مشابه معرفی و مورد استفاده مهندسین قرار گرفتند.

فصل‌های پنجم و ششم کتاب به آشنایی با این چهار ابزار توانمند اختصاص دارد. دقت کنید همان‌گونه که عکس‌ها و آزمایشات مختلف پزشکی از یک بیمار هر یک به نوعی به تشخیص بیماری و درمان آن کمک می‌کنند، ابزارهای گرافیکی در مطالعه سیستم‌های کنترل خطی نیز شرایط پیش آمده یا پیشنهاد شده برای یک سیستم را هر یک به شکلی به تصویر می‌کشند و معاینه تعیین و بهبود رفتار سیستم جز با شناخت دقیق و درک ارتباط متقابل این چهار ابزار امکان‌پذیر نیست.

پس از معاینه و تحلیل، برای آن‌که بتوان بیماری را به شیوه‌ای مناسب آن‌گونه که اشاره شد درمان نمود اولین گام آشنایی با انواع روش‌های درمان، داروهای موجود و اثرات جانبی آن‌ها می‌باشد که در همین راستا، بخش سوم از کتاب در فصل‌های هفتم و هشتم به‌طور کامل به موضوع طراحی یا جبران‌سازی اشاره می‌کند. انتظار می‌رود که درمان در حد امکان برای مدتی قابل قبول بوده حتی در صورت تغییر جزئی شرایط نیاز به تکرار نداشته باشد که این موضوع به تحلیل حساسیت سیستم کنترل در برابر تغییرات جزئی در سیستم تحت کنترل اشاره دارد که راهکارهای مناسب برای مقاوم نمودن سیستم در برابر تغییرات و شرایط جدید را پیشنهاد می‌کند.

پیشنهاد می‌کنیم قبل از شروع به مطالعه تعیین این کتاب پاسخی مناسب برای پرسش‌های زیر بیابیم:

۱ـ آیا ترتیب منطقی در شناخت سیستم نحوه معاینه و تحلیل و طرح راهکار مناسب برای بهبود آن مهم نیست؟ آیا می‌توان پس از بیان کامل مباحث تحلیل و طراحی به معرفی یکی از نمایش‌های سیستم پرداخت؟

۲ـ آیا حفظ تعادل و پایداری مهمترین فاکتور در کنترل بیماری نیست؟ در این صورت آیا جایز است مبحث پایداری را به عنوان یکی از مباحث درس بعد از پاسخ گذرا یا حتی دائمی مطرح کنیم. آیا اگر پایداری و تعادل بیمار بررسی نشود چگونه مطمئن هستیم بیماری از بین خواهد رفت که در مورد جزئیات سرعت و چگونگی از بین رفتن آن صحبت کنیم!

۳ـ آیا یک پزشک خوب نباید بتواند نتایج به‌دست آمده از تمامی معاینات، آزمایشات و تصویربرداری‌های انجام شده را به یکدیگر ارتباط دهد؟ آیا شما از پزشک خود انتظار دارید که صرفاً عمل دستگاه تصویربرداری پزشکی را شرح دهد یا حتی تقلید کند!

۴ـ آیا پاسخگویی به این سؤال که چرا در آزمون تخصصی پزشکی موفق نیستیم با این رویکرد دشوار است؟ آیا به عنوان یک پزشک عمومی توانمند شناخته می‌شویم! پاسخگویی به سؤالات سیستم‌های کنترل خطی آیا شرایطی مشابه خواهد داشت؟

۵ـ آیا هنوز انتخاب یک منبع مناسب برای مطالعه کار دشواری است؟!

امیدوارم با انگیزه‌ای مضاعف و درکی بهتر از آن‌چه باید پس از مطالعه این کتاب فرا بگیریم به مطالعه بپردازیم.

مدرسان شریف

فصل اول

« نمایش‌های مختلف سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) »

درسنامه (۱): نمایش‌های مختلف یک سیستم

مقدمه

یک سیستم مجموعه‌ای از اجزاست که در ارتباط با هم کار می‌کنند و هدف معینی را دنبال می‌کنند. سیستم توسط مرزهایی خیالی از محیط اطراف جدا می‌شود. متناظر با هر سیستم معمولاً با متغیرهایی سروکار داریم. آگاهی درباره‌ی برخی از متغیرهای داخلی سیستم در یک لحظه‌ی خاص بیانگر رفتار سیستم در آن لحظه است. به چنین متغیرهایی **متغیرهای حالت** یا **وضعیت** می‌گوییم. آنچه که از محیط خارج، خواسته یا ناخواسته بر سیستم اثر می‌کند و در متغیرهای حالت ایجاد تغییر می‌کند ورودی سیستم است. خروجی هر سیستم نیز به متغیری از آن اطلاق می‌شود که تغییراتش مورد توجه ماست. در برخی از سیستم‌ها، خروجی‌ها در یک لحظه‌ی خاص فقط به ورودی‌ها در همان لحظه وابسته هستند. به عبارتی، سیستم **بدون حافظه** است و گذشته‌ی خود را به یاد ندارد. به چنین سیستم‌هایی **استاتیک** یا **پایا** می‌گوییم. در مقابل، سیستم‌های **دینامیکی، پویا** یا **حافظه‌دار** قرار می‌گیرند که خروجی آن‌ها در هر لحظه علاوه بر ورودی در همان لحظه به ورودی‌های قبلی نیز وابسته است. اگر رابطه‌ی بین خروجی و ورودی(ها) در طول زمان ثابت باشد، سیستم نامتغیر با زمان بوده و اگر این رابطه با گذشت زمان تغییر کند، سیستم متغیر با زمان است. بنابراین باید دقت کرد که دینامیکی بودن سیستم و متغیر با زمان بودن دو مفهوم جداگانه و متفاوت‌اند.

در سیستم‌های دینامیکی، معمولاً اثر ورودی به طور آنی در خروجی ملاحظه نمی‌شود.

در سیستم‌های کنترل اتوماتیک یا خودکار، که در این درس مورد توجه هستند، می‌خواهیم خروجی سیستم را به مقدار مطلوبی برسانیم. به عبارت دیگر، خروجی سیستم را کنترل کنیم. اهداف موردنظر خود را که همان مقدار مطلوب هستند با عنوان ورودی مرجع یا به اختصار ورودی معرفی می‌کنیم. خروجی سیستم در هر لحظه باید ورودی مرجع را تعقیب کند. برای این کار، باید هزینه یا تلاش کنترلی انجام شود. عملکرد یک سیستم کنترل با مقایسه هدف کنترلی (ورودی) مرجع با خروجی سیستم در هر لحظه سنجیده می‌شود.

در بسیاری از موارد هدف از کنترل، تنظیم خروجی در یک مقدار مطلوب و ثابت است. در این حالت سیستم کنترل را **رگولاتور** می‌نامند. در موارد دیگری، هدف از کنترل، دنبال کردن یک مقدار مطلوب متغیر با زمان است. در این حالت به سیستم کنترل، **ردیاب یا سرومکانیسم** می‌گویند.

اکثر سیستم‌های کنترل فرآیند، رگولاتور هستند. خروجی چنین سیستم‌هایی معمولاً سطح مایع، غلظت، فشار، دما و ... است. تنظیم دمای اتاق با سیستم تهویه، تنظیم ارتفاع یا غلظت مایع درون یک مخزن، تنظیم دمای بدن انسان نزدیک ۳۷ درجه سانتی‌گراد، تنظیم قند خون یا فشار خون در یک حد معین نمونه‌هایی از سیستم‌های رگولاتور هستند. در مقابل، در سیستم‌های ردیاب، خروجی معمولاً به صورت تعیین سرعت، دنبال کردن هواپیما توسط موشک، ردیابی یک ماهواره به کمک آنتن، جابه‌جا کردن یک شیء توسط بازوی ربات می‌باشد.

عملکرد سیستم‌ها معمولاً تحت تأثیر ورودی‌های ناخواسته‌ای که آن‌ها را **اغتشاش** می‌نامیم، تضعیف می‌شود. به عنوان مثال، فرض کنید هدف، تنظیم دمای یک اتاق با سیستم تهویه روی ۲۵ درجه سانتی‌گراد باشد. حال اگر ناگهان در یا پنجره‌ای باز شود و هوای گرم‌تر از بیرون به اتاق بیاید، می‌گوییم به سیستم اغتشاش وارد شده است، بنابراین اغتشاش بر خروجی سیستم اثر نامطلوب می‌گذارد و کنترل را پیچیده‌تر می‌کند.

مبناهای متفاوتی در طبقه‌بندی سیستم‌های کنترل به کار رفته‌اند که به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱ـ طبقه‌بندی براساس شرایط محیط: سیستم‌های کنترل طبیعی، سیستم‌های کنترل دستی، سیستم‌های کنترل اتوماتیک.

۲ـ طبقه‌بندی براساس تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها: تک ورودی (single input) ـ تک خروجی(single output) (SISO)، تک ورودی ـ چند خروجی(multi outputs) (SIMO)، چند ورودی (multi inputs) ـ تک خروجی (MISO)، چند ورودی ـ چند خروجی (MIMO).

۳ـ طبقه‌بندی براساس طبیعت حلقه کنترل: کنترل حلقه باز، کنترل حلقه بسته، کنترل پیشخور و ... .

۴ـ طبقه‌بندی براساس طبیعت کنترل کننده:
- پیوسته/گسسته
- آنالوگ/ دیجیتال
- عددی
- نظارتی/ سلسله مراتبی

۵ـ طبقه‌بندی براساس طبیعت سیستم تحت کنترل (فرآیند):
- زمان پیوسته یا زمان گسسته
- خطی یا غیرخطی

۶ـ طبقه‌بندی براساس نوع متغیر تحت کنترل: سرومکانیسم یا کنترل فرآیند

۷ـ طبقه‌بندی براساس طبیعت ورودی مرجع: رگولاتور یا ردیاب

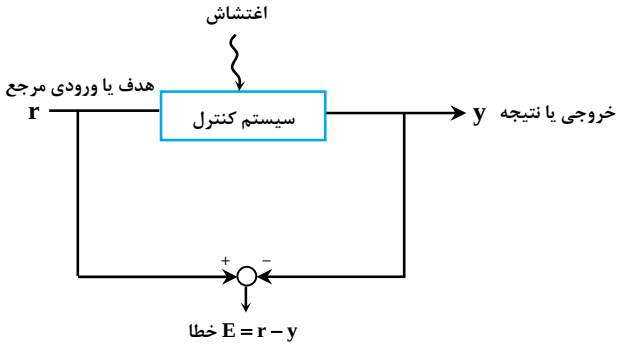
۸ـ طبقه‌بندی براساس نوع قانون کنترل: قطع و وصل، تناسبی، انتگرالی، فیدبک حالت خطی یا غیرخطی، بهینه، تطبیقی و ... .

۹ـ طبقه‌بندی براساس روش تحلیل و طراحی: حوزه زمان یا حوزه فرکانس، کلاسیک یا مدرن

مسلماً تمامی این موارد را نمی‌توان در قالب «کنترل خطی» مورد بررسی قرار داد. بنابراین ضروری است که حدود «مباحث پیش‌رو» و فرضیات اساسی، مورد توجه قرار گیرند. در ادامه، سیستم‌های خطیِ یک ورودی و یک خروجی (SISO) را مورد توجه قرار می‌دهیم. سیستم تحت کنترل زمان پیوسته و کنترل کننده‌های مورد بررسی آنالوگ هستند. طبیعت حلقه کنترل عمدتاً حلقه بسته است. نوع متغیر تحت کنترل تفاوتی نمی‌کند و طبیعت ورودی مرجع نیز در هر دو شکل خود مورد بررسی قرار می‌گیرد. قانون کنترل به کار رفته خطی است. تحلیل و طراحی در حوزه‌ی زمان و حوزه‌ی فرکانس به طور جداگانه صورت می‌گیرد و بر کاربرد روش‌های کلاسیک کنترل در برابر روش‌های مدرن تأکید می‌شود. لازم به ذکر است که با توسعه‌ی روش‌های مدرن، عمده‌ی مراجع به نوعی کنترل کلاسیک و مدرن را تلفیق کرده‌اند. این در حالی است که تمرکز اصلی در «کنترل خطی» بر روی روش‌های کلاسیک است. اما به هر حال آشنایی اولیه با تحلیل و طراحی مدرن چنانچه بعداً خواهیم دید، ضروری به نظر می‌رسد. در ادامه، فرضیات به کار رفته در تفکیک سیستم‌های کنترل خطی را به طور کامل بررسی خواهیم نمود و نهایتاً با مراحل تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل خطی آشنا می‌شویم. بدین ترتیب انگیزه‌ی لازم برای مطالعه و پیگیری دقیق سایر فصل‌ها فراهم خواهد آمد.

کنترل حلقه باز و کنترل حلقه بسته

کنترل سیستم‌ها می‌تواند به دو صورت حلقه باز یا حلقه بسته صورت گیرد. اما در هر دوی این روش‌ها و اساساً در کنترل، مسأله آن است که اختلاف بین هدف (که ورودی مرجع خوانده می‌شود) و خروجی (یا نتیجه سیستم) کاهش یابد.



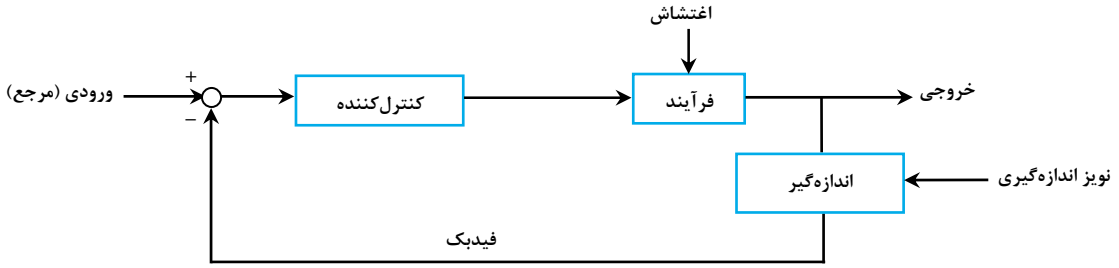
کنترل حلقه باز

در کنترل حلقه باز که در شکل زیر نشان داده شده است، کنترل‌کننده و ورودی سیستم مستقل از خروجی عمل می‌کنند. سیستم‌های کنترل حلقه باز ساده هستند و به ویژه در مواردی که اندازه‌گیری خروجی سیستم مشکل باشد و یا مقرون به صرفه نباشد، استفاده از چنین سیستم‌هایی مناسب است. سیستم‌های کنترلی که بر مبنای زمان کار می‌کنند، اغلب حلقه باز هستند. به عنوان مثال در ماشین لباسشویی، شستن و آب کشیدن لباس‌ها بر مبنای زمان است. در ماشین لباسشویی، معمولاً سیگنال خروجی که تمیز کردن لباس‌ها است، اندازه‌گیری نمی‌شود و با مقدار مطلوب که می‌تواند سطح مشخصی از میزان تمیزی لباس‌ها باشد مقایسه نمی‌گردد.

سیستم‌های حلقه باز در کنار سادگی و ارزان بودن، دارای معایبی هستند. پاسخ کند و خطای زیاد، تأثیرپذیری زیاد از اغتشاشات و تغییر پارامترهای فرآیند، استفاده از این سیستم‌ها را عملاً محدود می‌کند.

کنترل حلقه بسته

شکل زیر شمای کلی از یک سیستم کنترل حلقه بسته را نشان می‌دهد.



در سیستم‌های کنترل حلقه بسته، معایب سیستم‌های حلقه باز با کمک فیدبک برطرف می‌شوند. به کمک فیدبک، در واقع نتیجه‌ی کنترل با هدف آن مقایسه می‌شود و تصمیم‌گیری براساس اختلاف آن دو صورت می‌گیرد. در این سیستم‌ها، کنترل‌کننده از خطای کنترل در هر لحظه آگاه است و لذا می‌تواند تصمیمات لازم را در جهت کاهش خطا اتخاذ کند. با طراحی مناسب سیستم‌های حلقه بسته می‌توان کارایی سیستم را تا حد قابل قبولی افزایش داد. باید توجه داشت که مزیت اصلی سیستم‌های حلقه بسته در قابلیت تضعیف اثر اغتشاشات و تغییرات پارامترهای فرآیند و به طور کلی نامعینی‌های موجود در فرآیند است، به طوری که در صورت در دست داشتن مدل کاملاً دقیق از سیستم تحت کنترل و عدم حضور سیگنال‌های اغتشاش نیازی به استفاده از فیدبک نبوده و پاسخ مطلوب از طریق کنترل حلقه باز قابل حصول می‌باشد. اما در عمل چنین فرض‌هایی هیچگاه صادق نیستند و ناگزیر به استفاده از فیدبک هستیم. در مقابل برخلاف سیستم‌های حلقه باز، سیستم‌های حلقه بسته گران‌تر و پیچیده‌ترند و با خطر ناپایداری تهدید می‌شوند که در فصل آینده به آن می‌پردازیم.

نمونه‌هایی عملی از اجزای یک سیستم کنترل حلقه بسته

فرآیند یا سیستم تحت کنترل: معمولاً کنترل یک یا چند متغیر از متغیرهای فرآیند مدنظر است.

دیسک‌گردان، موشک، هواپیما، موتور، شبکه کامپیوتر، آسانسور، تعلیق اتومبیل، آسیاب و کلیه فرآیندهای صنعتی.

اندازه‌گیر (چشم کنترل): سرعت‌سنج، انکودر، LVDT ، Strain gauge، GPS، مبدل‌های دما نظیر ترموکوپل، ترمیستور و ... .

عملگر یا محرک (بازوی کنترل): پمپ، هیتر، سولنوئید، موتورهای الکتریکی، نیوماتیکی و یا هیدرولیکی، .... .

کنترل‌کننده (مغز کنترل): اپراتور، کامپیوتر دیجیتال، کامپیوتر آنالوگ، کنترل‌کننده‌های مکانیکی یا الکترومکانیکی.

اغتشاش (مزاحم کنترل): باد، زلزله، ناهمواری سطح جاده، ارتعاشات خارجی، تغییرات ماده تغذیه‌کننده سیستم.

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

همان‌طور که اشاره شد در کنترل خطی، سیستم تحت کنترل و همچنین کنترل‌کننده‌ی آن خطی فرض می‌شوند. منظور از سیستم خطی، سیستمی است که اصل برهم‌نهی یا جمع آثار در آن برقرار باشد. به عبارت دیگر در سیستم‌های خطی با ضرب ورودی در یک ضریب ثابت، خروجی هم به همان نسبت تغییر می‌کند. همچنین خروجی حاصل از جمع چند ورودی، برابر مجموع خروجی‌ها در حالتی است که هر یک از آن ورودی‌ها را به تنهایی اعمال کنیم. فرض مهم دیگر، تغییرناپذیری سیستم تحت کنترل در طول زمان است. لذا فرآیند تحت کنترل از این پس سیستمی خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی دو عامل اصلی موجب بروز اختلاف بین ورودی و خروجی در یک سیستم کنترل می‌شوند: **طبیعت دینامیکی سیستم** و **خطای حالت دائمی آن**. اشاره کردیم که سیستم‌های کنترل، سیستم‌های دینامیکی هستند و طبیعتاً پاسخ چنین سیستم‌هایی لحظه‌ای نیست؛ یعنی مدت زمانی طول می‌کشد تا پس از اعمال ورودی به سیستم، خروجی به حالت دائمی خود برسد. پاسخ سیستم در چنین بازه‌ای **پاسخ گذرا** نامیده می‌شود.

از طرفی مشخصات ذاتی سیستم و همچنین ورودی آن ممکن است سبب شوند تا خروجی حالت دائمی سیستم با خروجی مطلوب تفاوت داشته باشد که به این میزان اختلاف، **خطای حالت دائمی** گفته می‌شود.

اهداف اصلی از تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل را می‌توان در قالب موارد زیر برشمرد:

۱ـ پایداری ۲ـ بهبود خطای حالت دائمی ۳ـ بهبود پاسخ گذرا ۴ـ کاهش حساسیت سیستم در برابر تغییرات و عدم قطعیت‌ها

برای دستیابی به این اهداف، باید سیستم را تحلیل کنیم و برای آن کنترل‌کننده‌ای مناسب طراحی نماییم. تحلیل و طراحی را می‌توان شامل مراحل زیر دانست:

مرحله اول: مدل‌سازی

۱ـ مدل‌سازی سیستم تحت کنترل و ساده‌سازی آن در حد قابل قبول، ۲ـ تحلیل و شبیه‌سازی مدل به دست آمده **(تحلیل سیستم جبران نشده)**

مرحله دوم: طراحی

۱ـ انتخاب و جایابی حسگرها و مدل‌سازی آن‌ها، ۲ـ تصمیم‌گیری در مورد معیارهای کارایی مناسب (شاخص‌های عملکرد سیستم)، ۳ـ انتخاب نوع کنترل‌کننده، ۴ـ طراحی کنترل‌کننده (تعیین پارامترهای کنترل‌کننده)

مرحله سوم: ارزیابی

۱ـ شبیه‌سازی سیستم کنترل شده (**تحلیل سیستم جبران شده**)

مرحله چهارم: پیاده‌سازی

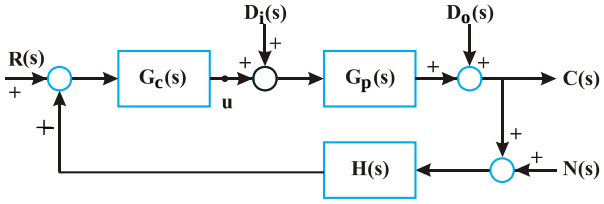
۱ـ انتخاب نرم‌افزار و سخت‌افزار مناسب، پیاده‌سازی و آزمودن کنترل‌کننده، ۲ـ تنظیم کنترل‌کننده و آموزش کاربر در صورت لزوم

لازم به ذکر است که مراحل یاد شده را می‌توان در واقع به شکل دیگر به دو قسمت مجزا تقسیم کرد. محصول نهایی در مرحله‌ی اولِ طراحی تعیین و توصیف اپراتور G_c یا همان کنترل‌کننده است که با استفاده از خروجی‌های اندازه‌گیری شده و مقادیر مطلوب خروجی‌ها، سیگنال کنترل را تولید می‌کند. در مرحله‌ی دوم که مرحله‌ای عملی است انتخاب محرک‌ها، حسگرها و دیگر عناصر کنترل صورت می‌گیرد و عناصر واسط کاربر و ماشین طراحی می‌شوند. لازم به تأکید است که فرآیند طراحی به شکلی که اشاره شد فرآیندی بازگشتی است؛ به این معنی که برای بهبود طرح در صورت لزوم مجدداً به مرحله‌ی اول که طراحی کنترل‌کننده است باز خواهیم گشت. اما قدم اول در طراحی، یافتن مدل ریاضی مناسب از سیستمی است که باید کنترل شود. این مدل‌سازی معمولاً به کمک قوانین شناخته شده‌ی علمی یا یک روش شناسایی یا ترکیبی از هر دو صورت می‌گیرد. قوانین فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی حاکم بر سیستم یا ترکیبی از آن‌ها ما را به یک ساختار ریاضی می‌رسانند که شامل متغیرهای مستقل و وابسته به علاوه‌ی یک سری پارامترهاست. این مدل در حالت کلی ممکن است استاتیک یا دینامیک، خطی یا غیرخطی، ثابت با زمان یا متغیر با زمان، زمان پیوسته یا زمان گسسته و قطعی یا تصادفی باشد. در دنیای واقعی همه سیستم‌ها رفتاری غیرخطی دارند و با گذشت زمان رفتارشان تغییر می‌کند، یعنی متغیر با زمان نیز هستند. اما در مدل‌سازی، اغلب با تقریب‌ها و فرض‌هایی، مدل خطی تغییرناپذیر با زمان برای سیستم استخراج می‌کنیم. جالب آنکه در بسیاری موارد مدل LTI، تقریب خوبی از سیستم است و در کنترل، نیازهای ما را برطرف می‌کند. همچنین نمایش سیستم می‌تواند بر اساس رابطه‌ی ورودی ـ خروجی یا رفتار درونی سیستم باشد. مقادیر پارامترهای مدل از طریق شناسایی به دست می‌آیند. بعد از تعیین مدل سیستم تحت کنترل، می‌توان آن را تحلیل کرده و یک روش کنترل ابتدایی را به کمک شبیه‌سازی کامپیوتری روی آن آزمود. به طور عادی ممکن است چندین طرح مختلف برای رسیدن به خواسته‌ها و اهداف طراحی مورد امتحان قرار گیرند.

در کنترل خطی در کلیه‌ی موارد فرض می‌کنیم که بخش اول از مرحله‌ی مدل‌سازی صورت گرفته است و مدل سیستم تحت کنترل با دقت مناسبی در دسترس است.

این مدل همان‌طور که اشاره شد زمان پیوسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. از طرفی، کنترل‌کننده‌های کلاسیک، ساختار از پیش تعیین‌شده‌ای دارند که هر کدام اثرات مختلفی بر عملکرد سیستم تحت کنترل خواهند داشت. لذا تحلیل سیستم جبران نشده اولین مرحله‌ای است که در مورد آن صحبت خواهیم نمود. با در دست داشتن کلیه‌ی مشخصات سیستم جبران نشده اعم از پایداری، پاسخ گذرا و خطای حالت دائمی می‌توان در مرحله‌ی بعد در مورد شاخص‌های عملکرد مناسب تصمیم لازم را اتخاذ کرد و نهایتاً به کمک کنترل‌کننده‌های کلاسیک به تحلیل سیستم جبران شده پرداخت. قطعاً اگر مدل‌سازی، شناسایی، تحلیل و طراحی موفق باشند، پیاده‌سازی کنترل که آخرین مرحله از فرآیند طراحی است نیز نتیجه قابل قبولی خواهد داشت. در غیر این صورت باید به یکی از مراحل قبلی بازگشت. در مورد پیاده‌سازی کنترل نیز مجالی برای بحث و بررسی نیست.

به‌طور خلاصه و با توجه به موارد اشاره شده در این درس بر ساختار کنترل حلقه بسته با مدل ریاضی زیر تمرکز خواهیم نمود و این ساختار را از این پس ساختار فیدبک یک درجه آزادی خواهیم نامید.



$R(s)$ و $C(s)$ به ترتیب نشان دهنده ورودی مرجع و خروجی (متغیر کنترل‌شونده) هستند. $G_p(s)$ مدل ریاضی فرآیند یا سیستم تحت کنترل است. $G_c(s)$ نیز مدل کنترل‌کننده یا جبران‌ساز طراحی شده است و $H(s)$ سیستم اندازه‌گیری (سنسور) را مدل می‌کند.

$N(s)$ نویزی است که هنگام اندازه‌گیری مدل می‌شود و $D_i(s)$ و $D_o(s)$ نیز به ترتیب اغتشاشات ورودی و خروجی هستند که در ورودی یا خروجی فرآیند مدل می‌شود. u نیز معرف سیگنال یا قانون کنترل است که به فرمان کنترل نیز مشهور است.

همان‌طور که دیدیم، فرض می‌کنیم که مدل سیستم تحت کنترل با دقت مناسبی در دسترس است و لذا $G_p(s)$ معمولاً مفروض است. البته ممکن است نمایش‌های ریاضی گوناگونی داشته باشد که در ادامه فصل به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

انتخاب $H(s)$ نیز با توجه به نوع متغیر کنترل‌شونده صورت می‌گیرد و موضوع اصلی بحث ابزار دقیق است. معمولاً برای سادگی در کنترل خطی فرض می‌شود که اندازه‌گیری به شکلی کاملاً ایده‌آل انجام می‌شود و عاری از نویز است. در این شرایط در بسیاری از موارد $H(s)=1$ و $N(s)=0$ فرض می‌شود که به مدل‌سازی «فیدبک واحد منفی» مشهور است.

بنابراین هدف اصلی در تحلیل و طراحی سیستم کنترل حلقه بسته، یافتن جبران‌ساز G_c خواهد بود به گونه‌ای که ساختار حلقه بسته پایدار باشد و خروجی در حالت دائمی، ورودی مرجع را به‌طور یقین ردیابی کند. به این منظور باید اثر اغتشاشات D_i و D_o و نویز اندازه‌گیری N در حالت دائمی به صفر برسند. به علاوه فرمان کنترلی «u» باید قابل اجرا و کم هزینه باشد، به‌طوری‌که در اجرا و پیاده‌سازی روش کنترلی با مشکل مواجه نشویم و در نهایت انتخاب G_c باید به‌گونه‌ای باشد که حساسیت را نسبت به تغییرات پارامترهای فرآیند G_p کاهش دهد. تمامی این اهداف قرار است با انتخاب G_c محقق شوند و به همین دلیل این ساختار فیدبک به یک درجه آزادی مشهور شده است. جزئیات مراحل طراحی و چگونگی دست‌یابی به این اهداف موضوع فصل‌های بعدی خواهد بود.

در ادامه و در اولین گام از تحلیل با شکل‌های گوناگون سیستم‌های LTI آشنا خواهیم شد. این نمایش‌ها در واقع مدل ریاضی سیستم تحت کنترل G_p را نشان می‌دهند که با آگاهی از ویژگی‌های این مدل در واقع مرحله اول از تحلیل و طراحی با تحلیل سیستم جبران نشده کامل خواهد شد.

سیستم‌های LTI نمایش‌های مختلفی دارند که هر یک دارای ویژگی‌های خاص خود هستند. **فرضیات اساسی** ما در مورد ویژگی‌های سیستم تحت کنترل یعنی **خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان، تک ورودی ـ تک خروجی بودن، فشردگی و زمان پیوستگی** سیستم باعث می‌شود که هر یک از این نمایش‌ها نیز شکل ساده‌تری به خود بگیرند. منظور از یک سیستم فشرده، سیستمی است که با تعداد محدودی متغیر حالت قابل توصیف است. چنین سیستم‌هایی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی بیان کرد. در این فصل ضمن آشنایی با این نمایش‌ها در مورد ویژگی‌های هر یک صحبت می‌کنیم. از آن‌جایی که همه این نمایش‌ها سیستم واحدی را توصیف می‌کنند، آگاهی از ارتباط آن‌ها با یکدیگر ضروری به نظر می‌رسد. نمایش‌های مورد بررسی عبارتند از:

۱ـ معادله دیفرانسیل ۲ـ پاسخ ضربه ۳ـ تابع تبدیل ۴ـ دیاگرام بلوکی ۵ـ مسیرگذر سیگنال ۶ـ فضای حالت

این نمایش‌ها قابل تبدیل به یکدیگرند، اما بسته به کاربرد و ویژگی‌هایشان مورد استفاده قرار می‌گیرند.

نمایش معادله دیفرانسیل

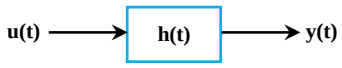
در هر سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)، رابطه‌ی بین ورودی و خروجی را می‌توان با یک معادله دیفرانسیل معمولی بیان کرد. به دلیل تغییرناپذیری سیستم با زمان، ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت و در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\dots+a_0 y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+\dots+b_0 u+\text{شرایط اولیه}$$

u ورودی و y خروجی سیستم فرض شده است. اگر شرایط اولیه صفر باشد سیستم در حالت سکون اولیه فرض می‌شود.

یافتن خروجی y به ازای ورودی u و شرایط اولیه مفروض نیاز به محاسبه پاسخ طبیعی و خصوصی به شکلی جداگانه دارد. این محاسبات معمولاً هزینه زیادی دارند و به همین دلیل در بحث سیستم‌های کنترل کمتر از این نمایش استفاده می‌شود.

نمایش پاسخ ضربه



سیستم‌های LTI از نوع سیستم‌های کانولوشن هستند؛ به این معنی که خروجی آن‌ها را می‌توان از کانولوشن پاسخ ضربه‌ی سیستم با ورودی دلخواه محاسبه کرد. به همین دلیل یک مدل معتبر برای سیستم LTI تک ورودی ـ تک خروجی، نمایش آن با پاسخ ضربه $h(t)$ است. در شکل روبه‌رو $y(t)=h(t)*u(t)$ می‌باشد. علامت * نشان‌دهنده‌ی عملگر کانولوشن است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

و اگر سیستم LTI علّی باشد، حد پایین انتگرال با صفر جایگزین خواهد شد. با توجه به دشواری محاسباتی از این نمایش نیز در سیستم‌های کنترل کمتر استفاده می‌شود.

نمایش تابع تبدیل

یکی از مزایای سیستم‌های LTI این است که می‌توان برای تحلیل آن‌ها از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. بدین ترتیب در حوزه s یا حوزه فرکانس، پاسخ سیستم به ورودی $u(s)$ به صورت $Y(s)=H(s)U(s)$ به دست می‌آید. $H(s)$ را تابع تبدیل سیستم گویند که در واقع تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه سیستم یعنی $h(t)$ است.

برای به دست آوردن تابع تبدیل، می‌توان از معادله دیفرانسیل سیستم LTI، با **شرایط اولیه صفر** تبدیل لاپلاس گرفت. مجدداً نمایش معادله دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت را در نظر بگیرید:

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0 y=b_m u^{(m)}+\dots+b_0 u$$

با فرض شرایط اولیه صفر، تبدیل لاپلاس معادله برابر است با:

$$(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_0)Y(s)=(b_m s^m+\dots+b_0)U(s)$$

بنابراین تابع تبدیل $H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$ عبارت است از: $H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_\circ}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_\circ}$

صورت تابع تبدیل را $N(s)$ و مخرج آن را $D(s)$ می‌نامیم، بنابراین: $N(s)=b_m s^m+\ldots+b_\circ$

$D(s)$ را معادله مشخصه سیستم نیز می‌گویند. $D(s)=a_n s^n+\ldots.+a_\circ$

درجه چندجمله‌ای مخرج را **مرتبه سیستم** می‌گوییم.

تابع تبدیل $H(s)$ را **اکیداً سره** (Strictly Proper) می‌گوییم اگر و فقط اگر درجه چندجمله‌ای $N(s)$ از درجه چندجمله‌ای $D(s)$ کمتر باشد، به‌عبارتی $m<n$ باشد. درحالتی‌که $m=n$ باشد، سیستم را **سره** و اگر $m>n$ باشد، سیستم را **ناسره** می‌گوییم (سیستم‌های فیزیکی همگی اکیداً سره می‌باشند).

تفاضل $n-m$ را **درجه‌ی نسبی** (Relative Degree) می‌نامیم و با r یا P_{ex} نمایش می‌دهیم.

ریشه‌های چندجمله‌ای $D(s)$ را **قطب‌های تابع تبدیل** می‌گوییم. به عبارت دیگر، $s=P_\circ$ قطب سیستم از درجه‌ی i است اگر $\lim_{s\to P_\circ}(s-P_\circ)^i H(s)$، مقداری محدود و غیر صفر باشد.

ریشه‌های چندجمله‌ای $N(s)$ را **صفرهای تابع تبدیل** می‌گوییم. به عبارت دیگر، $s=Z_\circ$ صفر سیستم از درجه‌ی i است اگر $\lim_{s\to Z_\circ}\frac{H(s)}{(s-Z_\circ)^i}$، مقداری محدود و غیرصفر باشد.

اگر $s=s_\circ$ صفری از تابع تبدیل باشد، به ازای ورودی $u(t)=ce^{s_\circ t}$ خواهیم داشت:

$$b_m\frac{du^m}{dt^m}+\cdots\cdots+b_\circ u=b_m(cs_\circ^m)e^{s_\circ t}+\cdots.+b_\circ ce^{s_\circ t}=(b_m s_\circ^m+\cdots.+b_\circ)ce^{s_\circ t}=N(s_\circ)ce^{s_\circ t}=\circ \Rightarrow Y(s_\circ)=\circ$$

از آنجا که صفر تابع تبدیل باعث می‌شود $H(s_\circ)=\circ$ شود در نتیجه $\Leftarrow$ ریشه‌های $\begin{cases}H(s_\circ).U(s_\circ)=Y(s_\circ) \Leftarrow H(s_\circ)=\frac{Y(s_\circ)}{U(s_\circ)}=\circ\\ \circ.U(s_\circ)=Y(s_\circ)=\circ\end{cases}$

صفر تابع تبدیل $Y(s_\circ)=\circ$ را سبب می‌شود.

به این معنی که وجود صفر $H(s)$ در $s=z_\circ$ انتقال سیگنال $u(t)=ce^{z_\circ t}$ را از سیستم مسدود می‌کند. به همین دلیل به این گونه صفرها، **صفر انتقال** گفته می‌شود.

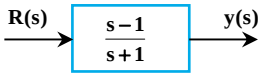
❖ **تعریف:** اگر $\lim_{s\to\circ}H(s)$، عددی محدود باشد، آن را **بهره‌ی حالت دائمی یا بهره‌ی استاتیکی (DC) سیستم** گویند. به عبارت دیگر در نمایش معادله دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت، ورودی و خروجی را ثابت در نظر بگیریم به طوری که $u(t)=u_\circ$ و $y(t)=y_\circ$ باشد، معادله دیفرانسیل به‌صورت $a_\circ y_\circ=b_\circ u_\circ$ خواهد بود و بنابراین $\frac{y_\circ}{u_\circ}=\frac{b_\circ}{a_\circ}$.

$\frac{b_\circ}{a_\circ}$ بهره‌ی حالت دائمی سیستم است که نسبت خروجی به ورودی در حالت دائمی را مشخص می‌کند. این عدد همچنین بیانگر میزان تقویت ورودی در حالت دائمی است.

دقت کنید که تابع تبدیل یک سیستم مستقل از اندازه و ماهیت ورودی می‌باشد و یک مدل ریاضی از سیستم بوده که رابطه بین متغیر ورودی و خروجی را بیان می‌کند. همچنین تابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی مختلف می‌توانند یکسان باشند. در واقع تابع تبدیل ارتباط بین ورودی و خروجی را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعاتی در رابطه با ساختار داخلی سیستم در اختیار ما نمی‌گذارد. با در دست داشتن تابع تبدیل یک سیستم می‌توان از ماهیت سیستم توسط بررسی پاسخ‌های آن به ورودی‌های مختلف، اطلاعات مفیدی به دست آورد.

توجه کنید که در محاسبه تابع تبدیل از روی معادله دیفرانسیل سیستم شرایط اولیه را صفر فرض کردیم؛ بنابراین واضح است که این نمایش نمی‌تواند تأثیر شرایط اولیه را بر روی خروجی سیستم توصیف کند و به همین دلیل تابع تبدیل نمایش حالت صفر یا ورودی ـ خروجی نامیده می‌شود. نکته مهم این‌که استفاده زیاد از این نمایش در مقایسه با نمایش‌های قبلی نباید موجب شود که ضعف این نمایش را در توصیف رفتار داخلی سیستم و پاسخ ورودی صفر سیستم نادیده بگیریم.

مثال ۱: در سیستم روبه‌رو، تحت چه شرایطی $y(s) \equiv 0$ می‌شود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)



۱) $R(t)=e^{+t}$ و $y(0)=1$

۲) $R(t)=e^{-t}$ و $y(0)=$ آزاد

۳) $R(t)=e^{+t}$ و $y(0)=-1$

۴) $R(t)=e^{-t}$ و $y(0)=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: مشخص است که تابع تبدیل سیستم صفر انتقالی در $s=1$ دارد؛ به این معنی که پاسخ حالت صفر متناظر با ورودی e^{t} صفر است. اما برای آن‌که $y(s)=0$ باشد، پاسخ ورودی صفر نیز باید صفر باشد. از قضیه مقدار اولیه داریم: $y(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s\,y(s)$

$$y(s)=R(s)H(s)=\frac{1}{s-1}\times\frac{s-1}{s+1}=\frac{1}{s+1}$$

برای صفر شدن $y(s)$، $y(0)$ باید -1 باشد که اثرات $y(0)_{\text{فعلی}}$ را از بین ببرد.

$$y(0)_{\text{فعلی}}=\lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s+1}=1$$

روش دوم: پاسخ هر سیستم به صورت مجموع پاسخ به ورودی و پاسخ به شرایط اولیه است. پس این دو پاسخ را می‌یابیم و با هم جمع می‌کنیم.

پاسخ به ورودی: با توجه به گزینه‌ها ورودی سیستم را به صورت $R(s)=\frac{1}{s+\alpha}$ در نظر می‌گیریم.

در نتیجه داریم:

$$Y_1(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s+\alpha)}=\frac{\frac{-2}{\alpha-1}}{s+1}+\frac{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}{s+\alpha}\xrightarrow{\ell^{-1}} y_1(t)=-\frac{2}{\alpha-1}e^{-t}+\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\alpha t}$$

پاسخ به شرایط اولیه: با توجه به تابع تبدیل سیستم معادله دیفرانسیل آن را به دست می‌آوریم: $\dot{y}+y=\dot{r}-r$

از آن‌جایی که در این قسمت هدف به دست آوردن پاسخ به شرایط اولیه است، پس ورودی و مشتق آن را صفر قرار می‌دهیم.

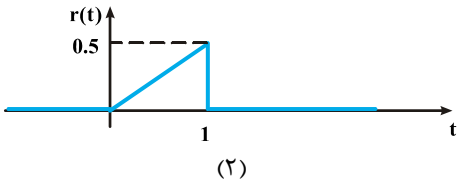
$$\dot{y}_2+y_2=0\Rightarrow y_2(t)=y(0)e^{-t}$$

با جمع کردن این دو پاسخ داریم:

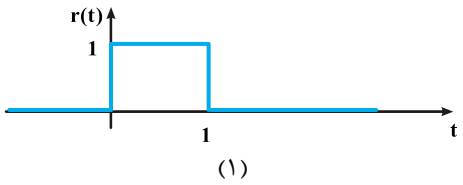
$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=(y(0)-\frac{2}{\alpha-1})e^{-t}+(\frac{\alpha+1}{\alpha-1})e^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow \alpha=-1\ ,\ y(0)+1=0\Rightarrow y(0)=-1\Rightarrow R(s)=\frac{1}{s-1}\ ,\ r(t)=e^{+t}$$

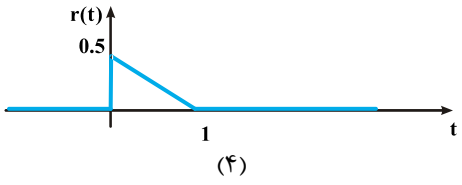
مثال ۲: پاسخ سیستم دینامیکی $\begin{cases}\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)\\ y(0)=0\end{cases}$ به ورودی $u(t)=3+2e^{-3t}r(t)$ در لحظهٔ $t=1$ به مقدار ۱، $(y(1)=1)$ رسیده و برای تمام زمان‌های بعد از آن در همین مقدار باقی می‌ماند. شکل موج سیگنال $r(t)$ کدام است؟ (دکتری ۹۲)



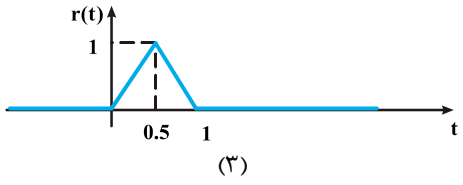
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\begin{cases}\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)\\ y(0)=0\\ u(t)=3+2e^{-3t}\ r(t)\end{cases}\Rightarrow \dot{y}(t)+3y(t)=3+2e^{-3t}\ r(t)\qquad (1)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین رابطه (۱) داریم:

$$sy(s)+۳y(s)=\frac{۳}{s}+۲R(s)(s+۳) \Rightarrow y(s)=\frac{۳}{s(s+۳)}+\frac{۲}{(s+۳)}R(s)(s+۳)$$

$$y(t)=L^{-۱}\big(y(s)\big)=L^{-۱}\left(\frac{۱}{s}+\frac{-۱}{s+۳}\right)+۲e^{-۳t}L^{-۱}\left(\frac{R(s)}{s}\right)=۱-e^{-۳t}+۲e^{-۳t}\int_{۰}^{t} r(t)dt$$

حال با توجه به صورت مسأله $y(۱)=۱$ قرار می‌دهیم و داریم:

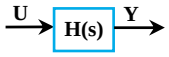
$$y(۱)=۱-e^{-۳}+۲e^{-۳}\int_{۰}^{۱} r(t)dt=۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۱} r(t)dt=\frac{۱}{۲}$$

حال در گزینه‌ها مساحت زیر نمودار $r(t)$ را باید در بازه $(۰,۱)$ محاسبه نماییم، هر کدام $\frac{۱}{۲}$ شد، پاسخ است:

گزینه ۱: $s=۱$ ؛ گزینه ۲: $s=\frac{۱}{۴}$ ؛ گزینه ۳: $s=\frac{۱}{۲}$ ؛ گزینه ۴: $s=\frac{۱}{۴}$

در نتیجه پاسخ، گزینه (۳) است.

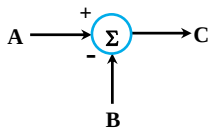
نمایش دیاگرام بلوکی



توابع تبدیل را به راحتی می‌توان با بلوک‌هایی که هر یک معرف سیستمی LTI هستند، نمایش داد. به طوری که بلوک رابطه ورودی ـ خروجی $Y(s)=H(s)U(s)$ را تداعی می‌کند. معمولاً برای سادگی s را از روابط حذف می‌کنند و رابطه را به شکل $Y=HU$ می‌نویسند. با نمایش دیاگرام بلوکی می‌توان به راحتی معادلات توصیف‌کننده یک سیستم حلقه بسته را به دست آورد.

در دیاگرام بلوکی، هر یک از پیکان‌ها، یک سیگنال تلقی می‌شوند. توجه کنید که بُعد سیگنال خروجی از بلوک برابر بُعد سیگنال ورودی ضرب در بُعد تابع تبدیل بلوک می‌باشد. همچنین در نظر داشته باشید که **سیگنال‌ها فقط در جهت پیکان‌ها حرکت می‌کنند.**

دیاگرم بلوکی می‌تواند شامل چندین بلوک، پیکان، نقطه جمع و نقطه انشعاب باشد.

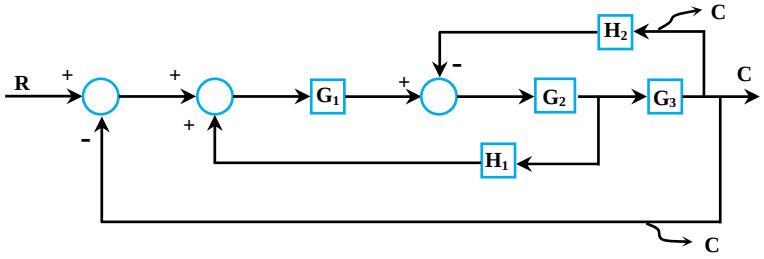


❖ **تعریف:** دایره‌ای با علامت‌های + و − یا Σ نشان دهنده‌ی عمل جمع یا تفریق است. یعنی سیگنال‌هایی که به این دایره وارد می‌شوند، پس از خروج، با هم جمع یا از هم کم می‌شوند، به عنوان مثال، شکل مقابل را در نظر بگیرید.

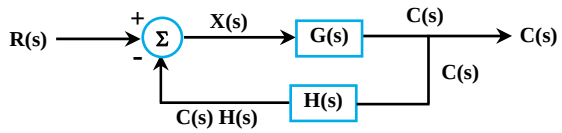
در این شکل، سیگنال A و سیگنال B به دایره وارد شده‌اند و سیگنال C برابر با حاصل جمع سیگنال A و منفی سیگنال B است، بنابراین داریم:

$$C=A-B$$

❖ **تعریف:** نقطه انشعاب نقطه‌ای است که از آن سیگنال یک بلوک به طور همزمان به بلوک‌های دیگر یا نقاط جمع دیگر می‌رود. در شکل زیر، نقطه انشعاب نشان داده شده است. دقت کنید که سیگنال C با سیگنالی که به بلوک $H_۲$ وارد می‌شود، برابر است و در نقطه انشعاب، تقسیم سیگنالی صورت نمی‌گیرد.



مثال ۳: **شکل روبه‌رو، دیاگرام بلوکی یک سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد که دارای فیدبکی با تابع تبدیل $H(s)$ می‌باشد، نسبت $\frac{C(s)}{R(s)}$ را به دست آورید.**



☑ **پاسخ:** سیگنال ورودی به بلوک $H(s)$، برابر $C(s)$ و سیگنال خروجی از آن $H(s)C(s)$ می‌باشد، سیگنال خروجی از بلوک $G(s)$ برابر $C(s)=G(s)X(s)$ است. با جایگذاری $X(s)$ داریم:

$$C(s)=G(s)\overbrace{\big(R(s)-H(s)C(s)\big)}^{X(S)} \Rightarrow (۱+G(s)H(s))C(s)=G(s)R(s) \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{۱+G(s)H(s)}$$