مدرسان شریف

فصل اول

تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

مقدمه

در این فصل خواننده با تعاریف پایه کنترل موجودی و سیستم موجودی آشنا شده قادر به شناسایی انواع هزینه‌های سیستم موجودی خواهد بود و باید بتواند هزینه‌های سیستم را در قالب هزینه‌های سفارش‌دهی و تدارکات، هزینه‌های نگهداری، هزینه‌های کمبود و هزینه‌های خرید کالا دسته‌بندی کند. نحوه برخورد واحدهای مختلف سازمان با مقدار موجودی نگهداری شده در انبار نیز در این فصل تشریح می‌گردد.

تعداد تستهای مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۱	۳	۷	۰	۰	۰	۱	۱	۰

تعریف موجودی

کالایی که جهت برآورده کردن تقاضایی در آینده (تقاضای مشتری(فروش) و یا تقاضای داخلی(مصرف)) به صورت نسبتاً راکد و غیر تولیدی نگهداری می‌شود را «موجودی» می‌نامند.

مثال ۱: آیا کالایی که در خط تولید در جریان است و بر روی آن عملیات صورت می‌گیرد، نفت در جریان در خطوط لوله، نفت داخل مخازن پالایشگاه و محصولات داخل فروشگاه موجودی می‌باشند؟

☑ **پاسخ :** ـ طبق تعریف فوق کالایی که در خط تولید در جریان است و عملیاتی بر روی آن صورت می‌گیرد موجودی به حساب نمی‌آید.

ـ نفتی که در خطوط لوله در جریان است موجودی نیست.

ـ نفت داخل مخازن پالایشگاه چون برای رفع تقاضای رسیده نگهداری می‌شود موجودی است.

ـ محصولات داخل یک فروشگاه نیز موجودی هستند.

نکته ۱: مواد خام اولیه، قطعات نیمه ساخته، قطعات ساخته شده و محصولات نهایی از انواع موجودی در سطح کارخانه می‌باشند.

نکته ۲: موجودی هنگامی که عملیات تدارک کالا به پایان می‌رسد به وجود می‌آید و تا هنگامی که کالای تهیه شده برای مصرف‌کننده (نه لزوماً مصرف‌کننده نهایی) ارسال می‌شود وجود دارد.

نکته ۳: کالاهایی که در حال حمل و نقل هستند و یا کالاهایی که در حال رشد هستند و یا نفتی که در خط لوله در جریان است، موجودی نمی‌باشند، زیرا این کالاها هنوز برای برآورده کردن تقاضا آماده نیستند.

مثال ۲: یک کارخانه ۱۰ حوضچه پرورش ماهی دارد و از ماهی این حوضچه‌ها برای تولید کنسرو تن ماهی در خط تولید کارخانه استفاده می‌نماید. کدام یک از گزینه‌های زیر برای این کارخانه موجودی به حساب نمی‌آیند؟

۱) ماهی‌های پخته شده در خط تولید
۲) ماهی‌های موجود در سردخانه
۳) ماهی‌های موجود در حوضچه‌های پرورش ماهی
۴) گزینه‌های ۱ و ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ماهی‌های پخته شده که در خط تولید می‌باشند می‌بایست در مراحل بعد به کنسرو تن ماهی تبدیل شوند و هنوز برای برآورده نمودن تقاضای مصرف‌کننده آماده نمی‌باشند و هنوز بر روی آنها می‌بایست عملیات دیگری انجام شود لذا ماهی موجود در خط تولید، موجودی نمی‌باشد. ماهی‌های موجود در سردخانه که از حوضچه‌های پرورش ماهی خارج شده‌اند با توجه به برنامه تولید کارخانه آماده ورود به خط تولید، و برآورده نمودن تقاضا هستند و لذا موجودی می‌باشند. ماهی‌های موجود در حوضچه نیز برای برآورده نمودن تقاضا آماده نیستند. زیرا در حال رشد بوده و هنوز برای ورود به خط تولید آمادگی ندارند.

نکته ۴: در صورتی که یک شرکت، استخر پرورش ماهی داشته باشد و ماهی‌ها را پس از رشد، به صورت مستقیم به فروش برساند، در هنگامی که ماهی صید می‌شوند تا هنگامی که برای مشتری ارسال می‌شوند به عنوان موجودی حساب می‌شوند.

نکته ۵: دو قلم فیزیکی هنگامی دو قلم یکسان محسوب می‌شوند که از هر نظر بتوانند جایگزین یکدیگر باشند.

مثال ۳: کدام یک از گزینه‌های زیر در سیستم موجودی، دو قلم یکسان محسوب می‌شوند؟

۱) دو کفش کاملاً یکسان ولی در سایزهای مختلف
۳) دو قطعه یدکی کاملاً یکسان برای یک شرکت خودرو سازی در دو انبار در دو شهر مختلف
۲) دو روزنامه ورزشی مختلف
۴) دو عدد تخم مرغ به وزن‌های ۱۰۰ گرم و ۹۵ گرم

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» دو شیء فیزیکی در سیستم موجودی هنگامی دو قلم یکسان محسوب می‌شوند که از هر نظر بتوانند با یکدیگر قابل تعویض و جایگزینی باشند. دو کفش کاملاً یکسان ولی در سایزهای مختلف نمی‌توانند با یکدیگر جایگزین شوند. دو قطعه یدکی یکسان در دو شهر مختلف نیز یک قلم موجودی به حساب نمی‌آیند، زیرا این دو قلم مستقیماً قابلیت جایگزینی یکدیگر را ندارند و برای جایگزینی آن دو با یکدیگر باید هزینه و زمان صرف شود. دو روزنامه ورزشی مختلف چون علاقه‌مندان خود را دارند و اخبار را با دیدگاه‌های مختلف تحلیل می‌کنند علی‌رغم این که ممکن است در شرایطی جایگزین یکدیگر شوند ولی دو قلم یکسان نمی‌باشند. از آن‌جا که واحد شمارش تخم‌مرغ، عدد می‌باشد و یک عدد تخم مرغ با یک عدد تخم مرغ دیگر قابلیت جایگزینی دارد لذا دو قلم موجودی یکسان می‌باشند.

مثال ۴: کدام یک از اقلام زیر موجودی یکسان در نظر گرفته می‌شوند؟

۱) دو درخت کاج تقریباً هم اندازه برای کریسمس
۲) دو تکه ورق گالوانیزه با ضخامت ۱/۵ میلی متر تقریباً هم اندازه یکی به وزن ۲۰ کیلوگرم و دیگری ۱۹ کیلوگرم
۳) هر دو مورد
۴) هیچ کدام

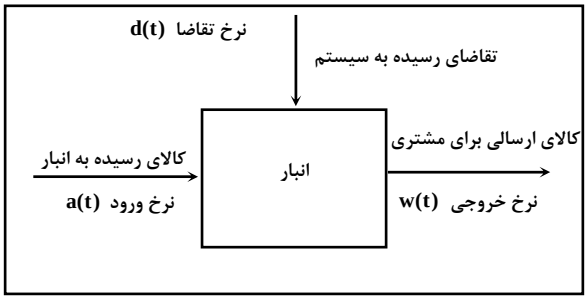
☑ **پاسخ : گزینه «۳»** دو درخت کاج در گزینه ۱ با یکدیگر قابلیت جایگزینی دارند. ورق‌های مورد اشاره در گزینه ۲ نیز همانند یکدیگر هستند، چون مقیاس ما در فروش ورق، کیلوگرم می‌باشد و می‌توان ادعا نمود که ۳۹ کیلوگرم وروق گالوانیزه در گزینه ۲ به عنوان موجودی نگهداری می‌نماییم.

کنترل تولید و موجودی

❖ **تعریف:** به برنامه‌ریزی و کنترل کالای تولید شده و یا خریداری شده، جهت نگهداری موجودی کالا در سطح مشخص و معین در جهت رفع تقاضای رسیده با توجه به سیاست نگهدارنده موجودی به گونه‌ای که حداقل هزینه و یا حداکثر سود را داشته باشد، «کنترل تولید و موجودی» می‌گویند.

نکته ۶: در سیستم موجودی، با توجه به پیش‌بینی تقاضا و سایر سیاست‌های مالک سیستم موجودی، شامل مقدار کمبود و سایر محدودیت‌ها مثل محدودیت فضای انبار، تعیین می‌نماییم که در چه زمانی و به چه مقداری سفارش صادر نماییم.

❖ **تعریف:** سیستم موجودی شامل نرخ ورود موجودی به انبار (به عنوان ورودی سیستم) و نرخ خروج موجودی از انبار (با توجه به مقدار تقاضای رسیده و موجودی انبار تعیین می‌شود) به عنوان خروجی سیستم می‌باشد. مجموعه فرآیندهایی که در داخل سیستم موجودی به انجام می‌رسد شامل چیدن اقلام رسیده در انبار و تحویل موجودی انبار به مشتری با توجه به تقاضای رسیده می‌باشد.



شکل ۱. سیستم موجودی

نکته ۷: در درس برنامه‌ریزی و کنترل موجودی تنها توانایی شرکت یا سازمان بر روی تغییر در مقدار $a(t)$، (نرخ ورود) با توجه به حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه مورد بررسی قرار می‌گیرد و توانایی سازمان در تغییر در مقدار $d(t)$ (نرخ تقاضا) با توجه به کاهش قیمت و یا تبلیغ بیشتر و سایر سیاست‌های بازاریابی مورد بررسی قرار نمی‌گیرد در حالی که یک سازمان می‌تواند مقدار تقاضا را نیز تحت تأثیر قرار دهد.

نکته ۸: در حالی که سیستم موجودی مورد بررسی، انبار مواد اولیه یک کارخانه باشد، مقدار $d(t)$ (نرخ تقاضا) کاملاً در اختیار سازمان می‌باشد ولی باز هم در درس کنترل موجودی، سیاست‌های برنامه‌ریزی تولید بررسی نمی‌شوند و توانایی تأثیر سازمان بر روی تقاضا مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

دلایل استفاده از موجودی

از آن‌جایی که نگهداری موجودی همواره هزینه دارد، در صورتی که قیمت کالا تغییر زیادی در طول زمان کوتاه‌مدت نداشته باشد و تأمین موجودی در هر زمان به راحتی و با سرعت بالایی امکان‌پذیر باشد، عدم نگهداری موجودی بسیار مناسب است. ولی چون همواره چنین شرایطی موجود نیست، به دلایل زیر نگهداری موجودی اجباری می‌باشد:

۱ـ عدم قطعیت تقاضا و تغییرات تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی بودن آن

۲ـ تغییرات قیمت در بازار و احتمال افزایش قیمت کالا در زمان‌های خاص

۳ـ افزایش هزینه حمل‌و نقل، در صورتی که در هر بار رسیدن تقاضا، سیستم موجودی یک سفارش خرید صادر نماید.

۴ـ عدم انتظار مشتری برای دریافت با تأخیر کالا و رقابتی بودن بازار در جذب مشتری

۵ـ هموارسازی عملیات تولید برای متوقف نشدن خط تولید در صورت خرابی یک دستگاه.

۶ـ استفاده از موقعیت‌های حراج بعضی از کالاها

۷ـ خرید و یا تولید مجموعه‌ای از قطعات و کالاها به صورت همزمان

۸ـ افزایش میزان فروش با در معرض دید قرار دادن کالاها

۹ـ افزایش اطمینان مشتری نسبت به عدم کمبود کالا در هنگام نیاز

نکته ۹: تمامی سازمان‌ها به دنبال شرایطی هستند که نیازی به داشتن موجودی نداشته باشند و سیستم آنها در هنگام نیاز به کالا، آن را تهیه نماید ولی بخش‌های مختلف سازمان نیز برخوردهای متفاوتی با سطح موجودی نگهداری شده در انبار دارند:

الف ـ بخش بازاریابی که فروش محصولات شرکت را بر عهده دارد انتظار دارد که سطح موجودی زیادی در انبار محصول نهایی نگهداری شود تا زمانی که به میزان سفارش مورد نیاز رسید، توانایی فروش داشته باشد و در هنگام مذاکره با مشتری، نگران عدم برآورده ساختن نیاز مشتری نباشد. در ضمن در صورتی

مدرسان شریف

فصل دوم

مدل اندازه سفارش اقتصادی

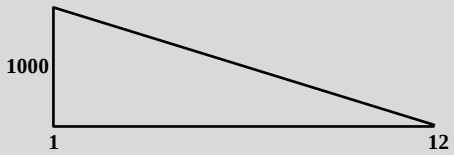
در این فصل مدل‌های قطعی سفارش اقتصادی مورد بررسی قرار می‌گیرند. با وجودی که تقاضا را نمی‌توان در اکثر موارد به صورت قطعی پیش‌بینی نمود و نرخ تقاضا معلوم و قطعی نمی‌باشد، در این فصل برای درک بهتر انواع سیستمهای موجودی، تقاضا را قطعی در نظر می‌گیریم. خواننده در پایان فصل با سفارش اقتصادی در حالت مجاز نبودن کمبود و مجاز بودن کمبود آشنا شده و قادر خواهد بود با توجه به هدف سیستم موجودی که حداقل کردن هزینه‌ها می‌باشد، زمان صدور سفارش و مقدار سفارش را تعیین نماید.

تعداد تستهای مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

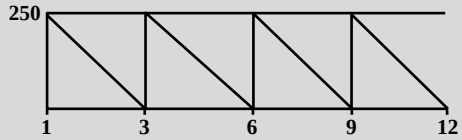
۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۵	۷	۶	۳	۴	۷	۴	۳	۰

تفسیر یک مدل موجودی

در یک مدل موجودی ساده و قطعی همواره دو هزینه عمده نگهداری و سفارش‌دهی موجود است که عکس یکدیگر عمل می‌کنند. به طور مثال فرض کنید یک شرکت از یک نوع ماده اولیه سالانه ۱۰۰۰ واحد نیاز دارد این شرکت می‌تواند تمام موجودی مورد نیاز خود را در ابتدای سال سفارش دهد که در این صورت یک بار هزینه سفارش‌دهی را متحمل می‌شود. ولی باید برای کل محصول هزینه نگهداری زیادی بدهد. (شکل ۱). اما شرکت می‌تواند در ابتدای هر فصل یعنی ۴ بار در سال، در هر نوبت ۲۵۰ واحد سفارش دهد. در این حالت درست است که هزینه سفارش‌دهی ۴ برابر می‌شود ولی هزینه نگهداری در مقایسه با قبل کاهش خواهد یافت. (شکل ۲)



شکل ۱



شکل ۲

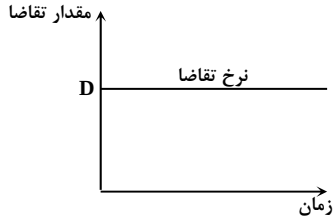
در یک مدل موجودی قصد داریم که به نحوی بین هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری تعادل ایجاد کنیم تا کمترین هزینه را به دست آوریم، متغیر ما در این کار همان‌طور که از شکل‌های بالا معلوم است تعداد سفارش در هر سال است $(n = \frac{D}{Q})$ که باعث می‌شود Q (مقدار سفارشی در هر بار) عامل تصمیم‌گیری ما باشد.

در یک مدل موجودی در حالت کلی ۲ سؤال وجود دارد: زمان سفارشی و مقدار سفارشی. اهمیت مقدار سفارش در بالا بیان شد ولی منظور از زمان صدور سفارش آن سطحی از موجودی است که هرگاه موجودی حال حاضر به آن برسد باید اقدام به صدور سفارش کنیم. مدل‌های موجودی با توجه به فرضیات آن‌ها دسته‌بندی می‌شوند. در ادامه ساده‌ترین مدل موجودی را شرح می‌دهیم.

مدل EOQ ساده

مدل EOQ ساده‌ترین مدل کنترل موجودی است. در این مدل کلیه شرایط ثابت و قطعی و معین در نظر گرفته شده‌اند و تا حدودی شرایط آن غیرواقعی می‌باشد. ولی این مدل می‌تواند کمک مناسبی برای تجزیه و تحلیل مدل‌های کنترل موجودی در شرایط واقعی باشد.

فرضیات مدل EOQ



برای تعیین یک سیستم موجودی هفت عامل مؤثر هستند که در فصل قبل بیان شدند. وضعیت هریک از این هفت عامل در مدل EOQ به شرح زیر می‌باشد:

۱ـ نرخ تقاضا قطعی و ساکن است و مقدار آن در طول دوره برنامه‌ریزی ثابت، معلوم و مشخص می‌باشد. یعنی نرخ تقاضا در طول سال، معلوم و ثابت و مستقل از زمان است. در واقع نرخ تقاضا در هر لحظه از نمودار مقابل پیروی می‌نماید.

۲ـ کمبود مجاز نمی‌باشد یعنی مقدار موجودی خالص هیچ‌گاه از صفر کمتر نخواهد شد. با توجه به این که مقدار تقاضا قطعی و معین می‌باشد، لذا می‌توان انتظار داشت که طوری برنامه‌ریزی نماییم که هیچ‌گاه با کمبود روبرو نشویم. در این مدل برای این که کمبود نداشته باشیم، هزینه‌های مواجهه با کمبود را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم تا کمبود نداشته باشیم و لذا هزینه‌های کمبود صفر شوند.

۳ـ محدودیت‌هایی از قبیل فضای انبار، سرمایه درگیر موجودی، تعداد سفارش و ... نداریم. در واقع هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم سفارش صادر نماییم و هیچ شرایطی برای سفارش صادر شده به مدل تحمیل نمی‌شود.

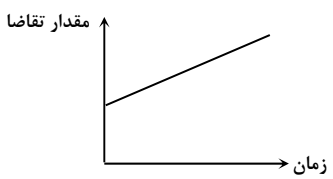
۴ـ مقدار سفارش صادر شده، یک جا دریافت می‌شود. یعنی سفارش در چند بخش و یا به صورت ذره، ذره به سیستم وارد نمی‌شود.

۵ ـ مدت زمان تحویل، قطعی و معین است. مدت زمان تحویل، مدت زمان بین لحظه صدور سفارش تا لحظه دریافت سفارش می‌باشد. در واقعیت این مقدار به ندرت ثابت و معین می‌باشد. به عنوان مثال هیچ‌گاه روزنامه‌های دکه روزنامه‌فروشی رأس یک ساعت مشخص به دکه نمی‌رسند و معمولاً تأخیر و یا تعجیل دارند. در مدل EOQ این گونه در نظر گرفته می‌شود که همواره L واحد زمانی پس از صدور سفارش، کالا دریافت می‌شود.

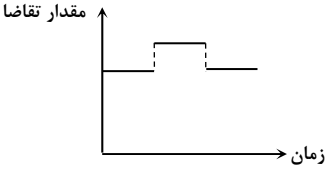
۶ ـ قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است و به مقدار سفارش بستگی ندارد. در واقعیت هنگامی که کالای بیشتری خریداری شود، فروشنده تخفیف بیشتری می‌دهد ولی در مدل EOQ ساده فرض بر این است که قیمت کالا ثابت است و کلیه کالاهایی خریداری شده بدون توجه به مقدار سفارش و زمان سفارش به همان قیمت خریداری می‌شود. در مدل EOQ ساده تورم نیز نداریم در حالی که در واقعیت پس از مدتی قیمت جنس تغییر می‌یابد و همواره ثابت نمی‌باشد.

۷ـ مدل تک محصولی می‌باشد. یعنی در مدل EOQ ساده تنها یک قلم جنس را بررسی می‌نماییم و سیستم موجودی را بر اساس یک قلم کالا مدلسازی و حل می‌کنیم.

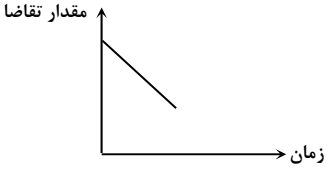
مثال ۱: تقاضاهای چند کالا همانند شکل‌های زیر می‌باشد، کدام یک از این کالاها قطعاً از مدل EOQ ساده پیروی نمی‌کنند؟



کالای A



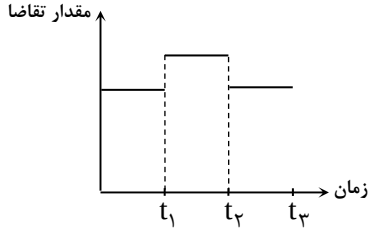
کالای B



کالای C

۱) کالای A و B ۲) کالای A و C ۳) کالای B و C ۴) کالای A و B و C

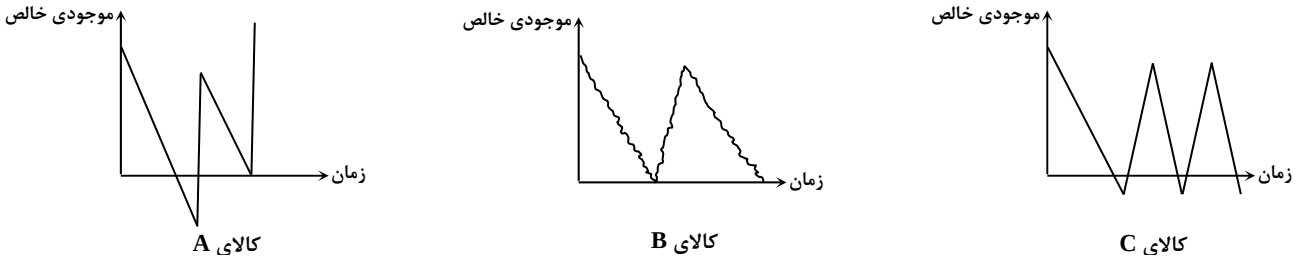
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در مدل EOQ ساده تقاضا در افق برنامه‌ریزی ثابت و ساکن می‌باشد. تقاضای کالای A هیچ‌گاه ثابت و مستقل از زمان نمی‌باشد. کالای C نیز همانند کالای A می‌باشد و در آن در طول افق برنامه‌ریزی همواره تقاضا در حال کاهش می‌باشد.



برای کالای B داریم:

از زمان صفر تا t_1 نرخ تقاضا ثابت و قطعی می‌باشد و اگر افق برنامه‌ریزی ما برای مدل EOQ ساده در این زمان به پایان برسد، مدل می‌تواند یک مدل EOQ ساده باشد، همین‌طور اگر افق برنامه‌ریزی از t_1 تا t_2 و یا از t_2 یا t_3 باشد.

مثال ۲: کدام‌یک از کالاهای زیر فرضیات مدل EOQ ساده را نقض می‌نمایند؟

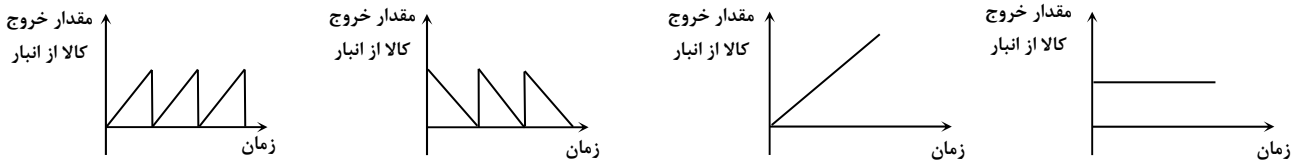


۱) کالاهای A و B ۲) کالاهای A و C ۳) کالاهای B و C ۴) هر سه کالا

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» هیچ‌کدام از کالاهای فوق فرضیات مدل EOQ ساده را ندارند. کالای A و C با کمبود روبه‌رو شده‌اند و موجودی خالص آن‌ها مقدار منفی پذیرفته است در حالی‌که در مدل EOQ ساده، کمبود مجاز نمی‌باشد.

برای کالای B نیز شیب کاهش موجودی خالص به صورت ثابت نمی‌باشد. از طرفی سفارش دریافت شده یک جا و با شیب بی‌نهایت (خط عمودی) به سیستم اضافه نمی‌شود.

مثال ۳: کدام یک از نمودارهای زیر مقدار خروج کالا از انبار یک مدل EOQ ساده را به درستی نشان می‌دهد؟



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آن‌جا که در مدل EOQ ساده، کمبود موجودی نداریم، لذا کلیه تقاضاهای رسیده برآورده شده و از انبار خارج می‌شوند. لذا شیب نرخ خروج کالا از انبار می‌بایست برابر نرخ تقاضا رسیده باشد. از آن‌جا که نرخ تقاضا نیز ثابت می‌باشد پس نموداری که در آن شیب، مقداری مثبت و یک عدد ثابت می‌باشد، می‌تواند نرخ خروج کالا از انبار در مدل EOQ ساده را به خوبی نشان دهد. توجه شود که نرخ خروج نمی‌تواند شیب منفی یا صفر داشته باشد.

مثال ۴ : یکی از فرضیات مدل EOQ این است که:

۱) تقاضا نامعلوم و متغیر است. ۲) اگر تقاضا چهار برابر شود، مقدار سفارش دو برابر می‌شود.

۳) قیمت خرید فقط در شرایط خاص تغییر می‌نماید. ۴) در هر بار سفارش، کل مقدار سفارش یک جا دریافت می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه شود که گزینه۲ صحیح است ولی از فرضیات مدل EOQ نمی‌باشد.

مثال ۵ : هدف مدل EOQ عبارت است از:

۱) حداقل نمودن اندازه سفارش ۲) حداقل کردن هزینه نگهداری کالا

۳) حداقل کردن هزینه نگهداری و سفارش‌دهی ۴) حداقل کردن هزینه سفارش‌دهی کالا

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هدف مدل EOQ حداقل کردن مجموع هزینه‌ها می‌باشد.

فصل سوم

مدل تولید اقتصادی (EPQ)

در این فصل مدل تولیدی مورد بررسی قرار داده می‌شود. در این مدل بر خلاف مدل ارائه شده در فصل قبل، نرخ ورود کالا به انبار محدود می‌باشد و این شرایط بیشتر در شرایطی که انبار یک کارخانه که خط تولید دارد کاربرد دارد. همانند فصل قبل انواع شرایط مختلف سیستم موجودی در این حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۴	۲	۲	۳	۱	۱	۳	۰	۰

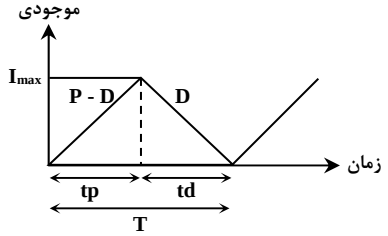
پارامترهای مدل تولید اقتصادی (EPQ)

در فصل قبل فرض بر این بود که هر بار که سفارش صادر می‌شود، در لحظه دریافت به صورت یکجا و کامل دریافت می‌شود. در مدل تولید اقتصادی شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن محصول پس از تولید به انبار کارخانه می‌رود. در این حالت محصول با نرخ ثابتی وارد انبار می‌شود و دیگر به صورت یکجا دریافت نمی‌شود. وقتی که دستگاه‌ها آماده تولید می‌شوند، محصول با نرخ تولید P واحد در سال ساخته شده و وارد انبار می‌شود. واضح است که سیستم موجودی وقتی کاربرد دارد که $P > D$ باشد یعنی نرخ تولید در سال بزرگ‌تر از تقاضا در طول سال باشد.

فرضیات مدل EPQ همانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یکجا دریافت نمی‌شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج وارد انبار می‌گردد (عدد ثابت =P) هدف مدل تعیین مقدار هربار تولید اقتصادی (Q^*) و زمان صدور سفارش (r_h^*, r^*) با حداقل نمودن هزینه کل سیستم موجودی می‌باشد.

P: نرخ دریافت سفارش(نرخ تولید)

t_p: مدت زمانی از دوره که در آن خط تولید مشغول به تولید کالا است.



t_d: مدت زمانی از دوره که تولید متوقف است و فقط تقاضا داریم.

$$T = t_p + t_d = \frac{Q}{D}$$

(توضیح: اگر تقاضا نبود در مدت t_p موجودی با نرخ p به سطح Q می‌رسد.)

$$t_p = \frac{Q}{P}$$

$$t_d = T - t_p = \frac{Q}{D} - \frac{Q}{P} = \frac{Q}{D}(1 - \frac{D}{P}) = T(1 - \frac{D}{P})$$

در مدل EPQ در هنگامی که خط تولید در حال تولید می‌باشد، محصول با نرخ P وارد انبار شده و با نرخ D (نرخ تقاضا) از انبار خارج می‌شود لذا نرخ ورود کالا به انبار در هنگام تولید P-D واحد در سال می‌باشد. در هنگامی که خط تولید فعال نمی‌باشد، نرخ خروج کالا از انبار برابر D (نرخ تقاضا) می‌باشد. مانند حالت مدل EOQ ساده، حداقل موجودی (SS) برابر صفر گرفته می‌شود تا هزینه اضافی به سیستم تحمیل نشود.

در یک دوره، هزینه‌های راه‌اندازی (سفارش‌دهی در مدل EOQ ساده)، نگهداری و هزینه تولید (همانند هزینه خرید در مدل EOQ) خواهیم داشت. در یک دوره یک بار هزینه راه‌اندازی داریم که برابر A واحد پولی می‌باشد. به تعداد Q واحد نیز تولید می‌شود که هزینه‌ای برابر با CQ دارند. هزینه نگهداری نیز بدین ترتیب محاسبه می‌شود: هزینه نگهداری یک دوره = (مساحت زیر نمودار) $\times h = \frac{I_{max} \times T}{2} h = \frac{Q}{D} \times Q(1 - \frac{D}{P}) \times \frac{h}{2} = \frac{Q^2 h}{2D}(1 - \frac{D}{P})$

در رابطه فوق داریم:

$$I_{max} = (P-D)t_p = Dt_d = Q(1-\frac{D}{p})$$

در اینجا به مدت t_p واحد زمانی از مبدأ سیکل می‌گذرد و در هر واحد زمانی نیز P-D واحد وارد انبار می‌شود پس مقدار موجودی در لحظه‌ای که تولید متوقف می‌شود برابر حاصل ضرب این دو مقدار می‌باشد. از طرف دیگر مدت t_d واحد زمانی طول می‌شود تا این مقدار موجودی با نرخ مصرف D، به صفر برسد، لذا حاصلضرب این دو مقدار نیز همان حداکثر موجودی را به دست می‌آورد.

$$\text{کل هزینه یک دوره} = A + \frac{Q^2 h}{2D}(1-\frac{D}{P}) + CQ$$

چون تعداد دوره در یک سال برابر با $\frac{D}{Q}$ است پس داریم:

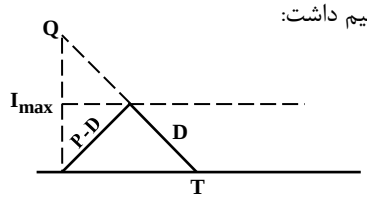
$$\text{متوسط هزینه سالیانه سیستم} = \frac{D}{Q}A + \frac{Qh}{2}(1-\frac{D}{P}) + CD$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}}\sqrt{\frac{P}{P-D}} = Q_W\sqrt{\frac{P}{P-D}}$$

$$K^* = \sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{P-D}{P}} = K_W\sqrt{\frac{P-D}{P}} = h\ I_{max} \quad ; \quad I_{max} = Q_W\sqrt{\frac{P-D}{P}} = Q^*(1-\frac{D}{P})$$

نکته ۱: به هر مقدار غیر اقتصادی هم اگر سفارش دهیم I_{max} از فرمول $Q\ (1-\frac{D}{P})$ پیروی می‌کند.

تذکر۱: اگر برای مقایسه نمودار موجودی در دسترس دو مدل EOQ و EPQ را با هم رسم کنیم خواهیم داشت:



- همان‌طور که دیده می‌شود I_{max} در حالت تولید کاهش می‌یابد.
- سطح زیر نمودار موجودی در دسترس کم می‌شود در نتیجه $\bar{I}$ کمتر می‌شود.
- هزینه نگهداری مدل EPQ کمتر از EOQ است.

نکته ۲: هر چقدر D به P نزدیکتر باشد مقدار حداکثر موجودی به صفر نزدیک‌تر خواهد بود و اگر $P = D$ باشد آن‌گاه خط تولید می‌بایست همواره تولید داشته باشد و در سیستم هیچ موجودی‌ای باقی نمی‌ماند.

نکته ۳: مقدار متوسط موجودی در مدل EPQ از رابطه روبرو محاسبه می‌شود: $\bar{I} = \frac{I_{max}}{2} = \frac{Q}{2}(1-\frac{D}{p})$

نکته ۴: نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً شبیه مدل EOQ است زیرا تنها تفاوت مدل EPQ و EOQ در نحوه دریافت سفارش می‌باشد که این نحوه دریافت در نمودار موقعیت موجودی تأثیری ندارد.

نکته ۵: در مدل EPQ داریم: $Q^*_{EPQ} \times I_{max} = Q_W^2$

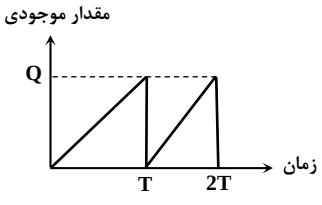
نکته ۶: در مدل EPQ داریم: $K(Q^*) = h\,I_{max} = \frac{2D}{Q^*}A$

مثال ۱: کدام یک از فرضیات مدل EOQ ساده در مدل EPQ صادق نمی‌باشد؟

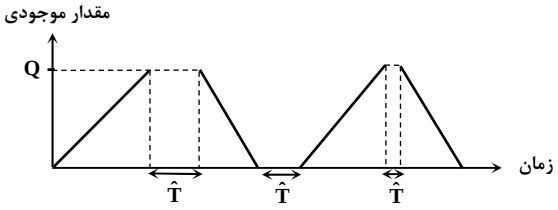
۱) ساکن و ثابت بودن نرخ تقاضا ۲) عدم مجاز بودن کمبود ۳) نحوه دریافت سفارشات ۴) تک محصولی بودن مدل

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تنها تفاوت مدل EPQ و EOQ در نرخ دریافت سفارشات صادر شده می‌باشد. در مدل EPQ کالا با نرخ P وارد انبار شده و در مدل EOQ با نرخ بی‌نهایت ورود کالا به انبار صورت می‌پذیرد.

مثال ۲: کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار موجودی خالص یک کارخانه با سیستم EPQ باشد؟



کالای A



کالای B

$\hat{T}$: **مدت زمانی که تقاضاهای رسیده از دست می‌روند.**

۱) فقط کالای A ۲) فقط کالای B ۳) هر دو کالا ۴) هیچ کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» کالای A تقاضای ثابت و ساکنی ندارد و در زمان‌های T و ۲T به مقدار Q واحد تقاضا بیشتر از سایر زمان‌ها می‌باشد. در حالت دوم هنگامی که انبار به مقدار Q واحد موجودی دارد تقاضاها از دست می‌روند که در مدل EPQ و EOQ چنین شرایطی متصور نمی‌شود.

مثال ۳: شرکتی انباری دارد که کالای نوع A را خریداری نموده و در انبار نگهداری نموده و در صورت نیاز برای مشتری‌ها ارسال می‌نماید. اخیراً شرکت تصمیم به تولید این کالا دارد. در صورتی که همه پارامترها در هر دو روش تولید و خرید یکسان باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر در حالت جدید نسبت به حالت اولیه کاهش یافته‌اند؟

۱) هزینه سفارش‌دهی ۲) هزینه نگهداری ۳) مقدار سفارش اقتصادی ۴) گزینه ۱ و ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» وقتی که سیستم از EOQ به EPQ تبدیل می‌شود داریم: $Q_{EPQ} = Q_{EOQ}\sqrt{\frac{P}{P-D}} \Rightarrow$ پس مقدار Q افزایش یافته است.

چون Q افزایش یافته پس متوسط هزینه سفارش‌دهی سالیانه کاهش یافته است $\Rightarrow$ متوسط هزینه سفارش‌دهی سالیانه $= \frac{D}{Q}A$

در مدل EPQ نیز همانند مدل EOQ ، هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی در حالت بهینه با یکدیگر برابرند و لذا هزینه نگهداری نیز در این حالت کاهش یافته است.

مثال ۴: در صورتی که نرخ تولید کارخانه‌ای بی‌نهایت زیاد باشد، در این حالت حداکثر موجودی چقدر می‌باشد؟

۱) در این حالت اصلاً سیستم موجودی نخواهیم داشت. ۳) برابر مقدار سفارش اقتصادی

۲) برابر صفر خواهد بود. ۴) مقداری کمتر از Q_W

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» وقتی $p = \infty$ باشد آن‌گاه داریم:

$$Q^* = Q_w\sqrt{\frac{P}{p-D}} \xrightarrow{p=\infty} Q^* = Q_w \quad ; \quad \lim_{p\to\infty} I_{max} = \lim_{p\to\infty} Q_w\sqrt{\frac{P-D}{P}} = Q_w$$

مثال ۵: محصول توسط یک ماشین به صورت دسته‌ای تولید می‌شود. نرخ تقاضای این محصول معلوم و ۷۰۰ واحد در سال است. نرخ تولید این محصول ۱۴۰۰۰ واحد در سال است. هزینه آماده‌سازی ماشین برای هر بار تولید ۵۲۵ تومان و هزینه نگهداری هر واحد این محصول ۳۰ تومان در سال است. متوسط جمع کل هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری این محصول در سال در حالت بهینه برابر است با:

۱) ۹۰۰۰ تومان ۲) ۹۵۰۰ تومان ۳) ۱۰۰۰۰ تومان ۴) ۱۰۵۰۰ تومان

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$K^* = \sqrt{2DAH}\sqrt{\frac{P-D}{P}} = 10500$$

فصل چهارم

مدل‌های چندمحصولی و مدل‌های محدودیت‌دار

در این فصل محدودیت‌هایی بر روی مدل‌های تولید و خرید اعمال می‌شود و در شرایطی که این محدودیت‌ها فعال می‌باشند مدل حل می‌شود. این مسائل در دنیای واقعی کاربردی‌تر می‌باشند. در پایان این فصل خواننده با انواع محدودیت‌های فضا، سرمایه و تعداد سفارش آشنا شده توانایی حل مسائل سیستم موجودی در شرایط چندمحصولی را خواهد داشت.

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۳	۳	۲	۲	۲	۱	۳	۱	۰

مدل خرید چندمحصولی ساده

در دنیای واقعی به ندرت در یک انبار فقط یک قلم کالا نگهداری می‌شود و معمولاً انبارها هزاران قلم کالا را در خود جای می‌دهند. با توجه به این موضوع کاربرد مدل‌های EOQ و EPQ که تا اینجا مورد بحث قرار گرفته‌اند بسیار کم می‌شود. در این بخش مدل چندمحصولی ساده بررسی می‌شود.

فرضیات این مدل مانند مدلEOQ است با این تفاوت که برنامه‌ریزی برای چند محصول انجام می‌پذیرد.

هدف مدل تعیین تعداد سفارش بهینه برای هر محصول (Q_j^*) و نقطه سفارش بهینه $(r_{h_j}^*, r_j^*)$ با حداقل کردن هزینه‌ها می‌باشد.

$$\text{تابع هدف}: \min z = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{۲} + C_j D_j\right) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial Q_j} = ۰ \Rightarrow Q_j^* = Q_{wj} = \sqrt{\frac{۲D_j A_j}{h_j}}$$

در اینجا چند محصول را می‌خواهیم با یکدیگر برنامه‌ریزی نماییم و هیچ محدودیت دیگری نداریم. این حالت همانند آن است که برای چند محصول به صورت تک‌تک مدل EOQ را حل نماییم.

نکته ۱: در مدل چندمحصولی ساده رابطه‌ای بین کالاهای مختلف که در انبار نگهداری می‌شوند وجود ندارد و این کالاها کاملاً از یکدیگر مستقل می‌باشند.

مثال ۱: دو کالای A و B در انباری نگهداری می‌شوند. انبار با استفاده از مدل چندمحصولی ساده می‌خواهد برای تهیه این دو قلم کالا برنامه‌ریزی نماید. اگر اطلاعات این دو کالا به شرح زیر باشد آن‌گاه مقدار سفارش اقتصادی هر یک چقدر است؟

شرح	کالای A	کالای B
تقاضای سالیانه (D)	۲۰۰۰	۴۰۰۰
هزینه سفارش‌دهی (A)	۴۵۰	۴۰۰
هزینه نگهداری (h)	۲۰	۲۰

۱) ۳۰۰,۳۰۰

۲) ۴۰۰,۲۰۰

۳) ۴۰۰,۳۰۰

۴) ۶۰۰,۳۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آن‌جا که دو کالا از مدل چندمحصولی ساده پیروی می‌نمایند، لذا هیچ‌گونه رابطه‌ای با یکدیگر نداشته و هر کدام از مدل EOQ ساده حل می‌شوند:

$$Q_A: \text{کالای } A = \sqrt{\frac{2D_A A_A}{h_A}} = \sqrt{\frac{2\times 2000\times 450}{20}} = 300$$

$$Q_B: \text{کالای } B = \sqrt{\frac{2D_B A_B}{h_B}} = \sqrt{\frac{2\times 4000\times 400}{20}} = 400$$

مثال ۲: انباری n کالای مختلف با پارامترهای متفاوت را نگهداری می‌نماید، اگر این کالاها با مدل چند محصول ساده کنترل شوند، آن‌گاه؟

۱) کلیه n کالا به مقدار مساوی Q سفارش داده می‌شوند.

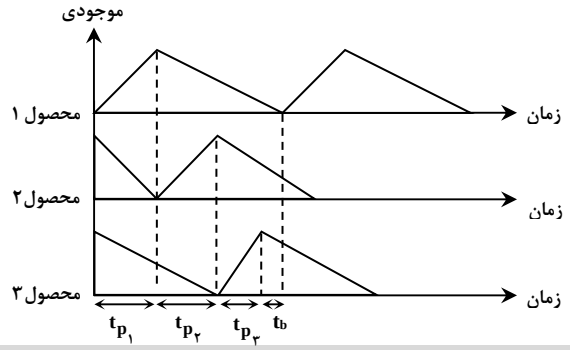
۲) کلیه n کالا بدون توجه به پارامترها با یکدیگر سفارش داده می‌شوند.

۳) برای صرفه جویی در هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی باید کالا با یکدیگر سفارش داده شوند.

۴) ممکن است حداقل هزینه در هنگامی که کالاها با یکدیگر سفارش داده می‌شوند رخ دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» کلیه کالاها لزوماً نباید به مقدار مساوی و یا در زمان‌های یکسان سفارش داده شوند، چون مدل چند محصول ساده می‌باشد، لذا هر کدام از محصولات به صورت مجزا از مدل EOQ ساده پیروی می‌نمایند و لذا ممکن است سیکل هر یک متناوب از سایرین باشد و یا با توجه به پارامترها ممکن است سیکل کالاهای مختلف یکسان باشد.

مدل چندمحصولی تولیدی



فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است، با این تفاوت که:

۱ـ سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌شود.

۲ـ کلیه محصولات توسط یک ماشین تولید می‌شوند.

t_b: مدت زمان بیکاری ماشین

مدت زمان بیکاری به مقدار Q وابسته نیست و این مدت گریزناپذیر است. چون P_i, D_i ثابت می‌باشند.

$$K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right) \qquad \text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_i\left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)\right)$$

$$\frac{dk(T)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$Q_j^* = T^* D_j \qquad K(T^*) = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}$$

تذکر۱: می‌توان از رابطه روبه‌رو در رد گزینه در تست‌ها استفاده کرد. $\frac{Q_1}{D_1} = \frac{Q_2}{D_2} = \ldots = \frac{Q_n}{D_n}$

نکته ۲: درصدی از زمان که ماشین مشغول تولید محصول j ام است= $\frac{D_j}{P_j}$

نکته ۳: شرط لازم برای این که مسأله جواب داشته باشد این است که: $\sum \frac{D_j}{P_j} \le 1$

در واقع این شرط بیان می‌دارد که مجموع درصد زمان‌های تولید محصولات از یک بیشتر نگردد.

الگوریتم حل مدل

ـ ابتدا شرط لازم برای جواب دار بودن مسأله را بررسی می‌نماییم. اگر شرط برقرار نباشد مدل جواب ندارد و امکان تولید با ماشین داده شده وجود ندارد.

ـ اگر شرط لازم برقرار باشد مقدار T^* را از رابطه داده شده به دست آورده و سپس Q_j^* را به دست می‌آوریم.

مثال ۳: در یک کارگاه صنعتی سه نوع محصول به وسیله یک ماشین تولید می‌شود. حداکثر ظرفیت تولیدی ماشین برای محصول یک برابر ۲۷۰۰۰ واحد در سال، برای محصول دو برابر ۳۶۰۰۰ واحد در سال و برای محصول سه برابر ۹۰۰۰ واحد در سال است. سایر ارقام مربوطه در جدول زیر آمده است.

محصول	۱	۲	۳
مصرف سالیانه به واحد	۹۰۰۰	۱۸۰۰۰	۶۰۰۰
هزینه نگهداری هر واحد در سال	۵	۶	۸
هزینه هربار سفارش	۸۰۰	۷۰۰	۵۰۰

مقدار اقتصادی هربار تولید برای هریک از محصولات چه مقدار است؟

۱) ۱۹۰۰, ۳۲۰۰, ۲۰۰۰ ۲) ۱۷۰۰, ۴۲۰۰, ۱۶۰۰ ۳) ۱۲۰۰, ۳۶۰۰, ۱۸۰۰ ۴) ۱۰۰۰, ۲۸۰۰, ۱۲۰۰

☑ **پاسخ:** مسأله غلط می‌باشد. ابتدا شرط لازم برای جواب داشتن مسأله را بررسی می‌نماییم.

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{D_j}{P_j}=\frac{9000}{27000}+\frac{18000}{36000}+\frac{6000}{9000}=1/5>1\Rightarrow$$ مسأله امکان‌پذیر نیست.

در صورتی که شرط امکان‌پذیری را چک نمی‌نمودیم آن‌گاه داشتیم:

$$T^*=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j P_j(1-\frac{D_j}{P_j})}}=0/2\Rightarrow Q_1^*=T^*D_1=1800$$

$$Q_2^*=3600 \qquad Q_3^*=1200$$

بدون حل مسأله نیز می‌توانستیم به این جواب برسیم:

$$\frac{Q_1^*}{D_1}=\frac{Q_2^*}{D_2}=\frac{Q_3^*}{D_3}\Rightarrow$$ با چک کردن گزینه‌ها می‌توانیم به گزینه ۳ برسیم

مثال ۴: خط تولیدی، ۳ محصول را با اطلاعات زیر تولید می‌نماید، مطلوب است به دست آوردن مقدار سفارش برای هر کدام از محصولات؟

محصول	۱	۲	۳
مصرف سالیانه	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰
نرخ تولید	۱۸۰۰۰	۲۵۰۰۰	۱۰۰۰۰
قیمت	۴	۶	۳
هزینه آماده سازی	۱۰۰	۸۰	۶۵
نرخ هزینه نگهداری	٪۱۰	٪۱۰	٪۱۰

۱) ۲۰۰۰ , ۱۰۰۰ , ۱۵۰۰ ۲) ۱۰۸۰ , ۵۴۰ , ۸۱۰ ۳) ۱۰۰۰ , ۵۰۰ , ۷۵۰ ۴) مسأله امکان‌پذیر نمی‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا امکان‌پذیری مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$\sum\frac{Dj}{Pj}\le 1\Rightarrow\frac{2000}{18000}+\frac{1000}{25000}+\frac{1500}{10000}=0/3\le 1$$

مسأله امکان‌پذیر می‌باشد.

$$T^*=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j(1-\frac{Dj}{Pj})}}\Rightarrow T^*=\sqrt{\frac{2(100+80+65)}{[(0/1\times 4\times 2000(1-\frac{2000}{18000})]+[0/1\times 6\times 1000(1-\frac{1000}{25000}]+[0/1\times 3\times 1500(1-\frac{1500}{10000}]}}$$

مدرسان شریف

فصل پنجم
مدل تخفیف

مقدمه

در دنیای واقعی در هنگام خرید کالا، فروشنده برای ترغیب خریدار به خرید کالای بیشتر، به هنگام خریدهای زیاد در قیمت کالا تخفیف داده و کالا را با قیمت کمتری به فروش می‌رساند. این موضوع با فرض مدل EOQ که در آن قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت می‌ماند تناقض دارد، به همین دلیل مدل‌های تخفیف برای پاسخ‌گویی به این گونه مسائل تهیه شدند.

مدل‌های تخفیف در دو نوع مختلف می‌باشند: در مدل اول، قیمت کل کالاهای خریداری شده تغییر می‌یابد و تخفیف شامل همه Q واحد خریداری شده می‌شود که این نوع تخفیف را **تخفیف کلی** می‌نامند و در نوع دوم تخفیف فقط شامل کالاهای اضافی خریداری شده می‌شود که این مدل را **مدل تخفیف نموی** یا **افزایشی** می‌نامند.

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

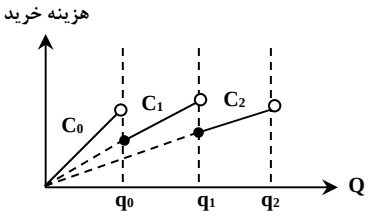
۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۳	۴	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰

مدل تخفیف کلی

گاهی اوقات تخفیف به شکل زیر خواهد بود:

برای مقادیر معلوم $q_n,...,q_1,q_0$ ، اگر مقدار سفارش در محدوده $q_j < Q < q_{j+1}$ باشد قیمت هر واحد از Q واحد C_j واحد پولی خواهد بود. یعنی، این قیمت شامل تمام Q واحد خریداری شده می‌گردد. به عبارت دیگر کل هزینه Q واحد برابر C_jQ واحد پولی می‌شود.

در این مدل تمامی واحدهای خریداری شده به یک قیمت واحد خریداری می‌شوند.



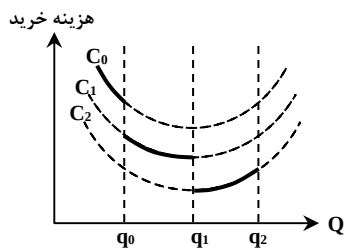
$$C = \begin{cases} C_0 & 0 \le Q < q_0 \\ C_1 & q_0 \le Q < q_1 \\ C_2 & q_1 \le Q < q_2 \end{cases} \quad \text{(قیمت کالا)}$$

$$C_2 < C_1 < C_0$$

رابطه هزینه مدل تخفیف کلی به صورت زیر است:

$$\text{کل هزینه سالیانه برای محدوده } j \text{ ام} = K_j(Q) = \frac{D}{Q}A + \frac{ic_j}{2}Q + c_jD$$

و نمودار آن نیز به صورت شکل روبرو خواهد بود:



وجود تخفیف کلی کار محاسبه مقدار سفارش اقتصادی را مشکل‌تر می‌کند. هزینه متوسط سالیانه سیستم که در فوق بیان گردید فقط در محدوده $q_j \le Q \le q_{j+1}$ قابل حصول می‌باشد. در صورتی که خارج از این ناحیه باشد $K_j(Q)$ غیر قابل حصول می‌باشد. بنابراین به طور کلی می‌توان هزینه متوسط سالیانه را به صورت زیر نوشت:

$$K(Q) = K_j(Q), q_j \le Q < q_{j+1}$$

در شکل فوق قسمتی از هزینه که با خط پر کشیده شده است، بخش قابل حصول این تابع و قسمتی که با خط چین رسم شده است، بخش غیر قابل حصول آن، یعنی ناحیه‌ای که در آن C_j صحت ندارد را نشان می‌دهد. بنابراین تمام قسمت‌هایی که با خط پر رسم شده‌اند منحنی واقعی هزینه سالیانه یعنی $K(Q)$ را به دست می‌دهند. اگر از محدودیت $q_j \le Q < q_{j+1}$ صرف نظر کرده و حداقل تابع $K_j(q)$ را در ناحیه $0 < Q < \infty$ با Q_j^w نشان دهیم، آن وقت:

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{2DA}{iC_j}}$$

از آن‌جا که $C_j > C_{j+1}$ می‌باشد، لذا:

$$Q_0^w < Q_1^w < \ldots < Q_n^w$$

و به علاوه به ازای تمام مقادیر Q، رابطه زیر برقرار است:

$$K_.(Q) > K_1(Q) > \ldots > K_n(Q)$$

برای پیدا کردن مقدار بهینه سفارش بایستی نقطهٔ حداقل منحنی خط پر را به دست آورد.

الگوریتم حل مدل

۱ـ ابتدا برای آخرین محدوده (محدوده n ام که کمترین قیمت را دارد) مقدار $Q_n^{(w)} = \sqrt{\frac{2DA}{ic_n}}$ را محاسبه می‌نماییم. در صورتی که جواب درمحدوده مشخص شده قرار داشت، جواب بهینه می‌باشد و متوقف می‌شویم، در غیر این صورت به گام دوم می‌رویم.

۲ـ مقدار Q_w را برای فاصله بعدی محاسبه می‌نماییم. در صورتی که در محدوده مجاز قرار داشت به گام سه می‌رویم. در غیر این صورت برای فاصله بعدی Q_w را محاسبه می‌نماییم تا آنجا که یک Q_w پیدا شود که در محدوده مجاز قرار داشته باشد.

۳ـ هزینه نقطه Q_w به دست آمده را محاسبه می‌نماییم و با هزینه نقاط شکست سمت راست، نقطه به دست آمده مقایسه می‌نماییم. هر کدام هزینه کمتری داشته نقطه بهینه می‌باشند.

نکته ۱: در صورتی که هزینه نگهداری سالیانه به C_jوابسته نباشد آن‌گاه کافی است یک بار Q_w را محاسبه نماییم و سپس گام سوم الگوریتم حل مدل را اجرا نماییم.

نکته ۲: نقطه ویلسون مجاز و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون مجاز به دست آمده می‌توانند بهینه باشند.

نکته ۳: در صورتی که مقدار Q_wمجاز به دست آمده نقطه بهینه نباشد، آن‌گاه نقطه‌ای در سمت راست آن بهینه خواهد بود. لذا $Q^* > Q_W$ و در نتیجه هزینه نگهداری سالیانه بیشتر از هزینه سفارش‌دهی خواهد بود. در حالت کلی در تخفیف داریم:

$$TCH \ge TCS$$

مثال ۱: فروشنده‌ای برای خرید با حجم بالا به صورت زیر تخفیف در نظر گرفته است. اگر تقاضای سالیانه ۴۰۰۰ واحد، هزینه ثابت هر بار سفارش ۱۸ تومان و نرخ هزینه نگهداری ۱۸٪ در سال باشد آن‌گاه مقدار اقتصادی هربار سفارش و هزینه کل سیستم چقدر است؟

$$C = \begin{cases} C_0 = 0/9 ; & 0 \le Q \le 499 \\ C_1 = 0/85; & 500 \le Q \le 999 \\ C_2 = 0/82; & 1000 \le Q \end{cases}$$

☑ **پاسخ:** طبق الگوریتم حل ابتدا جواب Q_W را برای نقطه با کمترین قیمت یعنی $C_۲ = ۰/۸۲$ به دست می‌آوریم.

$$Q_w^{(۲)} = \sqrt{\frac{۲DA}{ic_۲}} = \sqrt{\frac{۲\times ۴۰۰۰\times ۱۸}{۰/۱۸\times ۰/۸۲}} = ۹۸۷ \not> ۱۰۰۰$$

چون در محدوده مجاز قرار ندارد لذا به گام دوم الگوریتم می‌رویم. $Q_w^{(۱)} = \sqrt{\frac{۲\times ۴۰۰۰\times ۱۸}{۰/۱۸\times ۰/۸۵}} = ۹۷۰/۱۴ \le ۹۹۹$

در محدوده مجاز قرار دارد. به گام سوم می‌رویم و فقط کافی است هزینه نقطه به دست آمده را با هزینه نقاط شکست سمت راست یعنی $Q = ۱۰۰۰$ مقایسه نماییم.

$$K(Q = ۹۷۰/۱۴) = DC_۱ + \sqrt{۲DAic_۱} = ۴۰۰۰\times ۰/۸۵ + \sqrt{۲\times ۴۰۰۰\times ۱۸\times ۰/۱۸\times ۰/۸۵} = ۳۵۴۸/۴۳$$

$$K(Q = ۱۰۰۰) = DC_۰ + \frac{D}{Q}A + \frac{Q}{۲}iC_۰ = ۴۰۰۰\times ۰/۸۲ + \frac{۴۰۰۰}{۱۰۰۰}\times ۱۸ + \frac{۱۰۰۰}{۲}\times ۰/۱۸\times ۰/۸۲ = ۳۴۲۵/۸$$

چون هزینه نقطه شکست یعنی $Q = ۱۰۰۰$ کمتر است لذا مقدار سفارش اقتصادی $Q^* = ۱۰۰۰$ خواهد بود.

نکته ۴: شاید این گونه گمان گردد در صورتی که هزینه نگهداری به قیمت کالا بستگی داشته باشد بتوان به گونه‌ای قیمت کالا و یا درصد نرخ بهره را تغییر داد که کل هزینه نگهداری در نقطه شکست i از هزینه سفارش‌دهی کمتر گردد و نکته ۳ همیشه درست نمی‌باشد. ولی در صورتی که نرخ بهره و یا قیمت کالا را تغییر دهیم به گونه‌ای که هزینه نگهداری کمتر از هزینه سفارش‌دهی گردد آن‌گاه همیشه در این شرایط در صورتی که با مقادیر جدید، $Q_w^{(i+۱)}$ را محاسبه نماییم در محدوده مجاز قرار داشته و دیگر نقطه شکست نقطه بهینه نخواهد بود.

نکته ۵: در صورتی که تخفیف برای سایر پارامترها مثل A و h باشد همانند مدل تخفیف کلی عمل می‌نماییم و در صورتی که دریک مدل با افزایش تعداد خرید کالا، قیمت آن افزایش یابد دقیقاً عکس مدل تخفیف کلی عمل می‌نماییم و در ابتدا Q_W را برای کمترین قیمت یعنی بازه اول محاسبه می‌نماییم.

مثال ۲: مصرف سالیانه محصولی ۲۵۰۰ واحد، نرخ هزینه نگهداری این محصول ۱۰٪ در سال و هزینه هر بار سفارش آن ۱۰۰ تومان است. این محصول را می‌توان از فروشنده‌ای که جدول قیمت زیر را برای مقادیر مختلف خرید پیشنهاد نموده است، خریداری نمود. مقدار اقتصادی خرید در هر بار چقدر است؟

مقدار سفارش	هزینه واحد
$۰ \le Q < ۵۰۰$	$C_۰ = ۵/۰۰$
$۵۰۰ \le Q < ۲۵۰۰$	$C_۱ = ۴/۷۵$
$۲۵۰۰ \le Q < ۵۰۰۰$	$C_۲ = ۴/۶۰$
$۵۰۰۰ \le Q$	$C_۳ = ۴/۵۰$

۱) ۵۰۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) ۵۰۰۰ ۴) ۱۰۲۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

۱ـ ابتدا برای آخرین محدوده (محدوده بزرگتر از ۵۰۰۰ واحد) مقدار Q_n^w را به دست می‌آوریم.

$$Q_۳^w = \sqrt{\frac{۲DA}{iC_۳}} = \sqrt{\frac{۲\times ۲۵۰۰\times ۱۰۰}{۰/۱\times ۴/۵}} = ۱۰۵۴$$

در محدوده مجاز $Q \ge ۵۰۰۰$ قرار ندارد پس برای فاصله بعدی Q_n^w را محاسبه می‌نماییم:

$$Q_۲^w = \sqrt{\frac{۲DA}{iC_۲}} = \sqrt{\frac{۲\times ۲۵۰۰\times ۱۰۰}{۰/۱\times ۴/۶}} = ۱۰۴۲$$

در محدوده مجاز یعنی $۲۵۰۰ \le Q \le ۵۰۰۰$ قرار ندارد به سراغ فاصله بعدی می‌رویم:

$$Q_۱^w = \sqrt{\frac{۲DA}{C_۱}} = \sqrt{\frac{۲\times ۲۵۰۰\times ۱۰۰}{۰/۱\times ۴/۷۵}} = ۱۰۲۶$$

مدرسان شریف

فصل ششم
مدل‌های احتمالی

تاکنون همواره تقاضا معین و ساکن بوده است. در این فصل حالت‌های احتمالی بودن تقاضا و مدت زمان تحویل و تأثیر آن بر نحوه سفارش‌دهی بیان می‌شود. در انتهای فصل خواننده توانایی محاسبه مقدار موجودی اطمینان توجه به سطح خدمت تعریف شده را خواهد داشت.

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سالهای اخیر:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۷	۹	۹	۹	۷	۶	۷	۲	۰

مدل احتمالی یک دوره‌ای (درخت کریسمس / پسر روزنامه فروش)

در این بخش یک مدل موجودی بررسی می‌شود که در آن تقاضا، متغیری تصادفی بوده و تابع توزیع احتمال آن معلوم می‌باشد. در این مدل تنها برای یک دوره برنامه‌ریزی به انجام می‌رسد و فرصت تهیه محصول فقط یک بار و آن هم در ابتدای دوره می‌باشد. این مدل در بسیاری از مسائل موجود در واقعیت مانند: فروش روزنامه، کارت تبریک عید، محصولات فاسد شدنی، کالاهای مد روز و بعضی از محصولات فصلی کاربرد دارد. مهم‌ترین ویژگی این مدل این است که در آن تنها یک دوره زمانی در نظر گرفته می‌شود و موجودی باقی‌مانده در پایان دوره با قیمت کمتری به فروش می‌رسد و یا با صرف هزینه‌ای باید نابود شود.

فرضیات مدل: تفاوت فرضیات مدل احتمالی یک دوره‌ای با مدل EOQ بدین قرار است:

ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

ـ سفارش صرفاً یک بار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌شود.

ـ برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌گیرد و موجودی باقی‌مانده در انتهای دوره حراج شده و یا از بین می‌رود.

ـ کمبود جایز است.

ـ هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره محاسبه می‌گردد.

ـ در ابتدای دوره موجودی برابر I می‌باشد.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در یک دوره

C: قیمت خرید هر واحد

V: قیمت فروش هر واحد

$E(D)$: امیدریاضی تقاضا در یک دوره

π: هزینه کمبود هر واحد

L: قیمت حراج هر واحد

h: هزینه نگهداری هر واحد اضافی در انتهای دوره

I: موجودی ابتدای دوره

H: هزینه از بین بردن و یا حراج هر واحد کالا در انتهای دوره

هدف این مدل شناسایی میزان موجودی اول دوره یعنی R^* به گونه‌ای است که سود دوره مورد نظر را حداکثر سازیم. لذا برای حداکثر کردن سود باید ابتدا رابطهٔ آن را به دست آوریم:

هزینه‌ها – درآمد = سود

درآمد یک دوره: درآمدهای حاصل در یک دوره عبارتند از درآمد حاصل از فروش واحدهای تهیه شده در ابتدای دوره در صورتی که R واحد در ابتدای دوره داشته باشیم میانگین درآمد حاصل برابر است با:

$$P_1(R) = V\int_{\circ}^{R} xf(x)dx + V\int_{R}^{\infty} Rf(x)dx = E\ (\min(x,R)) \times V$$

رابطه اول سمت راست رابطه فوق احتمال آن است که سیستم به مقدار x واحد به فروش برساند و رابطه دوم احتمال این است که تقاضایی بیشتر از R واحد موجودی اول دوره داشته باشیم که چون بیشتر از R واحد نداریم، لذا R واحد موجودی را فروخته و باقی‌مانده فروش از دست رفته می‌شود.

$$P_1(R) = V\int_{\circ}^{\infty} xf(x)dx - v\int_{R}^{\infty} (x-R)f(x)dx \quad ; \quad P_1(R) = VE(D) - V\int_{R}^{\infty} (x-R)f(x)dx$$

هزینه یک دوره: هزینه‌های یک دوره شامل هزینه خرید، نگهداری و کمبود موجودی در طی یک دوره می‌باشد و میانگین آن برابر است با:

$$P_2(R) = C(R-I) + H\int_{\circ}^{R} (R-X)f(x)dx + \pi\int_{R}^{\infty} (X-R)f(x)dx = C(R-I) + HR - HE(D) + (\pi+H)\int_{R}^{\infty} (x-R)f(x)dx$$

سود یک دوره:

$$E\ (\text{سود یک دوره}) = E(Z(R)) = P_1(R) - P_2(R)$$

$$= (V+H)E(D) - [C(R-I) + HR + (V+\pi+H)\int_{R}^{\infty} (x-R)f(x)dx = (V+H)E(D) - K(R)$$

چون قسمت اول یک مقدار ثابت می‌باشد که به مقدار R بستگی ندارد، لذا حداقل کردن $K(R)$ در رابطه فوق، حداکثر کردن سود را نتیجه می‌دهد. لذا از $K(R)$ نسبت به R مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا حداقل مقدار $K(R)$ به دست آید.

$$K(R) = C(R-I) + HR + (V+\pi+H)\int_{R}^{\infty} (x-R)f(x)dx$$

$$\frac{\partial K(R)}{\partial R} = \circ \Rightarrow (C+H) - (V+\pi+H)[1-F(R^*)] = \circ$$

$$1-F(R^*) = \frac{C+H}{V+\pi+H} \quad ; \quad F(R^*) = \frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$$

در صورتی که مقدار $\pi = \circ$ باشد، آن وقت رابطه فوق هنگامی جواب دارد که $V \geq C$ باشد. واضح است که اگر $V < C$ باشد، از نظر اقتصادی سیستم موجودی نبایستی وجود داشته باشد.

روش حل: برای حل مدل مقدار R^* را از رابطه روبرو به دست می‌آوریم: $F_D(R^*) = \frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$

اگر $R^* \leq I$ باشد سفارش نمی‌دهیم ولی اگر $R^* > I$ باشد به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش می‌دهیم.

نکته ۱: اگر تقاضا گسسته باشد ممکن است مقداری که رابطه فوق را به صورت تساوی برقرار نماید یافت نشود.

در این حالت بزرگ‌ترین مقدار R که در رابطه زیر صادق باشد جواب مسأله خواهد بود.

$$P\{D > R\} > \frac{C+H}{V+\pi+H}$$

در حالت پیوسته متوسط موجودی باقی‌مانده در انتهای دوره $= \int_{\circ}^{R} (R-x)f_D(x)dx$

در حالت گسسته: متوسط موجودی باقی‌مانده در انتهای دوره $= \sum_{i=\circ}^{R} (R-x)\,p\{D=x\}$

متوسط هزینه نگهداری واحدهای باقیمانده = h (متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره)

در حالت پیوسته : $\text{متوسط کمبود در دوره} = \int_{R}^{\infty} (x-R) f_D(x) dx$

در حالت گسسته: $\text{متوسط کمبود در دوره} = \sum_{i=R}^{\infty} (x-R)\, p\{D=x\}$

مثال ۱: کارگاهی درخت کاج شب کریسمس را تهیه می‌نماید و تا شب عید به فروش می‌رساند و درخت‌های باقیمانده را به عنوان هیزم به فروش می‌رساند. اگر تابع توزیع تقاضای این درخت‌ها به صورت جدول زیر باشد و قیمت تهیه هر درخت ۳۰۰۰ واحد، قیمت فروش هر واحد ۵۰۰۰ واحد پولی باشد و قیمت فروش درخت به عنوان هیزم ۲۰۰۰ واحد باشد، میزان تولید بهینه چقدر است؟ متوسط موجودی باقی‌مانده در انتهای دوره و متوسط کمبود دوره چقدر است؟

x	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
p{D = x}	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۲	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵
$F_D(x)$	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵	۱

☑ **پاسخ:**

$$H = h - L = ۰ - ۲۰۰۰ = ۲۰۰۰$$

$$F_D(R) \geq \frac{V+\pi-C}{V+\pi+H} = \frac{۵۰۰۰-۳۰۰۰}{۵۰۰۰-۲۰۰۰} = ۰/۶۶ \rightarrow R^* = ۱۱ \qquad I = ۰ \Rightarrow Q^* = ۱۱$$

$$\text{متوسط موجودی باقی‌مانده انتهای دوره} = \sum_{x=۰}^{۱۱} (R-x)\, p(D=x)$$

$$= (۱۱-۶)\times ۰/۰۵ + (۱۱-۷)\times ۰/۰۵ + (۱۱-۸)\times ۰/۱ + (۱۱-۹)\times ۰/۲ + (۱۱-۱۰)\times ۰/۲ = ۱/۳۵$$

$$\text{متوسط کمبود} = \sum_{x=۱۱}^{۱۴} (x-R)\ P\{D=x\} = (۱۴-۱۱)\times ۰/۰۵ + (۱۳-۱۱)\times ۰/۰۵ + (۱۲-۱۱)\times ۰/۱ = ۰/۳۵$$

◆ ◆ ◆ ◆

نکته ۲: اگر در پایان دوره موجودی باقی مانده، برای ما درآمدی داشته باشد (مانند حراج) آن را با L نشان می‌دهیم و به صورت زیر وارد رابطه مدل تک دوره‌ای می‌کنیم.

در ضمن هزینه آخر دوره را می‌توان در H گنجاند.

$$F(R^*) = \frac{\pi+V-C}{\pi+V+H-L}$$

$$F(R^*) \geq \frac{\pi+V-C}{\pi+V+H-L}$$

نکته ۳: اگر در مسأله‌ای عبارت $\frac{\pi+V-C}{\pi+V+H} \leq ۱$ شد باید حداکثر مقدار تقاضا ممکن را برای R^* در نظر گرفت اگر $\frac{\pi+V-C}{\pi+V+H} \leq ۰$ شد کم‌ترین مقدار تقاضا ممکن برابر R^* است (نه لزوماً $R^* = ۰$).

مثال ۲: تقاضا برای نفت در یک مغازه در طول هفته متغیری تصادفی بوده و تابع توزیع چگالی آن نمایی با میانگین ۱۰۰ لیتر می‌باشد یعنی:

$$f_{(D)} = ۰/۰۱\, e^{-۰/۰۱D} \Rightarrow f_{(D)} = ۱ - e^{-۰/۰۱D}$$

نفت فقط یک بار در ابتدای هفته خریداری می‌شود و در انتهای هفته نیز مخزن نفت باید تخلیه شده و کاملاً تمیز شود. هزینه خرید هر لیتر نفت ۱۰۰ واحد پولی و قیمت فروش آن ۲۰۰ واحد پولی می‌باشد. هر لیتر نفت باقی‌مانده در انتهای هفته با صرف ۱۰ واحدپولی، از بین برده می‌شود. کمبود هر لیتر باعث از دست رفتن تقاضا می‌شود. مقدار بهینه خرید نفت در ابتدای هفته چقدر است؟

۱) ۰/۶۶ لیتر ۲) ۶۴/۶ لیتر ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ لیتر ۴) ۱۰۰ لیتر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$F(R^*) = ۱ - e^{۰/۰۱R^*} = \frac{۲۰۰-۱۰۰}{۲۰۰+۱۰} = \frac{۱۰}{۲۱} \Rightarrow R^* = ۶۴/۶$$

فصل هفتم

پیش‌بینی

مقدمه

معمولاً تقاضای رسیده به سیستم موجودی در واقعیت کاملاً مشخص نمی‌باشد و ما برای تعیین تقاضاهای رسیده باید از روش‌های پیش‌بینی استفاده کنیم و از روش‌های پیش‌بینی با استفاده از اطلاعات گذشته و تحلیل آماری در بعضی موارد اعمال نظر کارشناسان مقداری را برای تقاضا در آینده تعیین نماییم. در این فصل خواننده با این روش‌ها آشنا می‌شود.

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سال‌های گذشته:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۲	۲	۰	۲	۲	۱	۱	۱

انواع تقاضا در آینده

عواملی که سبب ایجاد تقاضا برای محصول در آینده می‌شوند را می‌توان به دو گروه تقسیم نمود:

الف) گروهی که سبب ایجاد تقاضا در گذشته شده‌اند.

ب) گروهی که در ایجاد تقاضا برای اولین بار اثر می‌گذارند.

تخمین‌های مربوط به گروه اول پیش‌بینی (Forecasting) و تخمین‌های مربوط به گروه دوم پیش‌گویی (Prediction) نامیده می‌شوند. برای تخیمن مقادیر آینده تقاضا دو راه کلی وجود دارد. یکی تخمین ذهنی یا همان پیش‌گویی این مقادیر است. پیش‌گویی معمولاً شامل تخمین عوامل کیفی، مثل اثر معرفی محصول جدید، رقبا و یا یک تغییر عمده در اقتصاد ملی است. از آن‌جا که پیش‌گویی نیازمند مهارت، تجربه و داوری ذهنی است، نمی‌توان تمام تقاضا را به طور موفقیت‌آمیز پیش‌گویی کرد. راه دیگر این است که الگوی تاریخی گذشته را به وسیله محاسبات عینی بر داده‌های گذشته برای آینده تصویر کرد. «پیش‌بینی» عبارت است از: تحلیل این داده‌ها و تصویر کردن آنها برای آینده که معمولاً به وسیله کاربر روی مدل‌های ریاضی مناسب انجام می‌شود. در واقع پیش‌بینی عبارت است از: فرآیند نتیجه‌گیری از داده‌های گذشته برای آینده است. نکته مهمی که باید بدان توجه نمود این است که پیش‌بینی، تخمینی از یک مقدار تقاضا در آینده است با این فرض که الگوی گذشته آن نیز ادامه پیدا کند. چون پیش‌بینی کردن یک فرآیند عینی است، ما می‌دانیم که چه عواملی در آن در نظر گرفته شده‌اند و چه عواملی در آن در نظر گرفته نشده‌اند. وقتی بعضی از عوامل سبب می‌شوند که الگوی تقاضا تغییر نماید وارد نماید، پس تا حدی می‌توان گفت پیش‌بینی یک ورودی برای پیش‌گویی می‌باشد. در واقع بسیاری از روش‌های پیش‌بینی بدین طریق عمل می‌کنند و مدیریت فرصت آن را دارد که به صورت بخشی از جریان تصمیم‌گیری، به طریقی پیش‌بینی را اصلاح نماید.

در این درس بیشتر مفهوم پیش‌بینی مدنظر می‌باشد و در ادامه روش‌های پیش‌بینی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱: کدام‌یک از موارد زیر هدف انجام پیش‌بینی می‌باشند؟

۱) کاهش میزان خطا در صدور سفارش
۲) حذف خطا در صدور سفارش
۳) اسفاده از داده‌های گذشته در جهت برنامه‌ریزی برای آینده.
۴) گزینه ۱و۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه ۳، تعریف پیش‌بینی است و هدف آن نمی‌باشد.

روش میانگین ساده

وقتی اطلاعات تقاضا برای دوره‌های گذشته در دسترس باشد، یک راه ساده برای پیش‌بینی تقاضا در آینده استفاده از میانگین تقاضاهای گذشته می‌باشد.

برای پیش‌بینی دوره $t+1$ وقتی که اطلاعات t دوره قبل در دسترس می‌باشد از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$F_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^{t} Dj}{t}$$

F_{t+1}: پیش‌بینی تقاضا برای دوره $t+1$ ام

D_j: میزان تقاضای واقعی دوره j ام

t: تعداد دوره‌هایی که اطلاعات آنها در دسترس می‌باشد.

مثال ۲: اطلاعات زیر برای مقدار تقاضای یک محصول در فروشگاهی در هفته‌های گذشته در دسترس می‌باشد، با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی برای هفته آینده چقدر است؟

شماره هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
مقدار تقاضای واقعی	۱۰۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۵	۱۳۰	۱۲۵	۱۲۰

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۳۰ ۴) ۱۱۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون روش میانگین ساده بیان شده است، کافی است از اطلاعات موجود میانگین بگیریم:

$$F_{۸} = \frac{\sum_{j=1}^{۷} Dj}{۷} = \frac{۱۰۰+۱۲۰+۱۲۰+۱۲۵+۱۳۰+۱۲۵+۱۲۰}{۷} = ۱۲۰$$

مثال ۳: با توجه به اطلاعات مثال فوق، پیش‌بینی تقاضا برای هفته دهم چقدر می‌باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۳۰ ۴) اطلاعات کافی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در روش میانگین ساده، با توجه به اطلاعات در دسترس برای آینده پیش‌بینی می‌کنیم و در صورتی که از هم اکنون برای دوره‌های آینده را نیز بخواهیم پیش‌بینی کنیم همان مقدار موجود را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

نکته ۱: وقتی که تقاضا فقط تغییرات تصادفی دارد و هیچ‌گونه روند صعودی یا نزولی و یا تغییرات سیکلی نداشته باشد، این روش، روش مناسبی برای پیش‌بینی می‌باشد. در این روش از تمام اطلاعات گذشته استفاده می‌شود و به همه آنها وزن یکسان $\frac{1}{t}$ داده و با یکدیگر جمع می‌نماید.

مثال ۴: عیب روش میانگین ساده و مزیت آن چیست؟

۱) عیب آن مشکل بودن محاسبات و مزیت آن در اختیار داشتن اطلاعات زیاد از گذشته می‌باشد.
۲) عیب آنها نگهداری اطلاعات بسیار از گذشته و مزیت آن سادگی محاسبات آن است.
۳) عیب آن زیاد بودن خطای روش و مزیت آن سادگی محاسبات است.
۴) عیب آن قابلیت استفاده تنها در موارد خاص و مزیت آن عدم نیاز به اطلاعات زیاد از گذشته است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این روش نیاز به نگهداری اطلاعات مقادیر واقعی دوره‌های گذشته ندارد و فقط نگهداری میزان پیش‌بینی دوره گذشته و تعداد دوره‌ها کفایت می‌کند. ولی عیب آن این است که فقط در موارد خاص که تقاضا تغییرات تصادفی داشته باشد کاربرد دارد. دیگر عیب عمده آن این است که به تغییرات تقاضا خیلی کند جواب می‌دهد.

مثال ۵: مهم‌ترین عیب روش میانگین ساده کدام است؟

۱) فقط در موارد خاص کاربرد دارد. ۲) اطلاعات بسیاری از گذشته نیاز است.
۳) پیچیده بودن محاسبات آن ۴) خطای بسیار زیاد آن

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» روش مناسبی است اگر روند یا تغییرات فصلی در کار نباشد.

روش میانگین متحرک ساده

در این روش معدل تقاضای یک دوره را برای N دوره گذشته به دست می‌آورند. یعنی در صورتی کـه اطلاعـات بـرای $N+M$ دوره گذشـته در دسـترس باشد فقط از N دوره اخیر میانگین می‌گیریم. در واقع از رابطه زیر برای پیش‌بینی تقاضا استفاده می‌شود.

$$F_{t+1}=\frac{D_t+D_{t-1}+...+D_{t-N+1}}{N}=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}D_{t-i}}{N}$$

در عمل برای کاهش حجم محاسبات از رابطه روبرو استفاده می‌شود:

$$F_{t+1}=A_t=A_{t-1}-\frac{D_{t-N}}{N}+\frac{D_t}{N}$$

$$F_{t+1}=A_t=A_{t-1}+\frac{D_t-D_{t-N}}{N}$$

که در آن A_t میانگین تقاضا برای N دوره گذشته از زمان t می‌باشد.

نکته ۲: اگر تغییرات تقاضا برحسب زمان نسبتاً شدید باشد، مقدار N را کوچک (مثلاً بین ۳ تا ۵) و اگر این تغییرات کم باشد از $N=12$ تا $N=18$ استفاده می‌شود. بهترین آزمون برای انتخاب N، کاربرد روش پیش‌بینی روی ارقام تقاضای گذشته اطلاعات در دست است. بدین طریق که مقدار خطا را برای Nهای مختلف به دست آورده و آن N را که کمترین خطا را دارد انتخاب می‌نماییم.

نکته ۳: برای به دست آوردن خطای روش‌های مختلف پیش‌بینی از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\text{مقدار خطا}=s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_t-F_t)^2}{n-f}}$$

n: تعداد دوره‌ها F: درجات آزادی از دست رفته

مثال۶: اطلاعات زیر برای تقاضای کالایی در دست می‌باشد. اگر بخواهیم با استفاده از روش میانگین متحرک ساده، برای دوره‌های ۷ و ۸ تقاضا را پیش‌بینی نماییم، تعداد $N=4$ یا $N=5$ بهتر است یا خطای آن چقدر است؟

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضای واقعی	۱۰۰	۹۰	۹۵	۱۲۰	۱۱۰	۱۰۵	۱۰۰	۱۱۰

۱) $N=4$ با خطای ۷/۶ ۲) $N=5$ با خطای ۵/۶۵ ۳) $N=4$ با خطای ۵۷/۸ ۴) $N=5$ با خطای ۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با استفاده از $N=4$ برای دوره‌های ۷ و ۸ تقاضا را پیش‌بینی می‌نماییم.

$$F_7=\frac{95+120+110+105}{4}=107/5$$

پیش‌بینی تقاضا برای دوره ۷ برابر میانگین دوره‌های ۳ تا ۶ می‌شود.

$$F_8=\frac{120+110+105+100}{4}=108/75$$

$$S_1=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2}(D_t-F_t)^2}{2-1}}=\sqrt{\frac{(100-107/5)^2+(110-108/75)^2}{1}}\Rightarrow S_1=7/6$$

حال با $N=5$ مسأله را حل می‌کنیم:

$$F_7=\frac{90+95+120+110+105}{5}=104\quad;\quad F_8=\frac{95+120+110+105+100}{5}=106$$

$$S_2=\sqrt{\frac{(100-104)^2+(110-106)^2}{1}}=5/65$$

نکته ۴: در این روش اگر تعداد دوره‌های تناوب برابر T باشد، فاصله زمانی تأخیر $\frac{T+1}{2}$ خواهد بود.

نکته ۵: وزن داده شده به اطلاعات واقعی دوره قبل برای N دوره قبلی $\frac{1}{N}$ و برای دوره‌های قبل از N برابر صفر می‌باشد.

مدرسان شریف

فصل هشتم

مدل‌های قطعی و پویا

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های گذشته.

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۴	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱

مقدمه

فرضیات مدل‌های قطعی وپویا همانند مدل EOQ است با این تفاوت که تقاضا قطعی و پویا است، سفارش صرفاً در ابتدای هر دوره می‌رسد و هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهایی محاسبه می‌شود که از یک دوره به دوره دیگر منتقل می‌گردند.

دوره: فاصله زمانی تعیین شده است که تقاضا در آن مشخص می‌باشد.

نکته ۱: تقاضاها در هر دوره قطعی هستند ولی در دوره‌های مختلف الزاماً برابر نیستند.

مثال ۱: مدل‌های قطعی و پویا از کدام فرض مدل EOQ پیروی نمی‌نمایند؟

۱) قیمت کالا در طول افق برنامه‌ریزی ثابت است.

۲) هزینه نگهداری کالا مشمول کلیه کالاهای رسیده و نگهداری شده می‌باشد.

۳) تقاضا در طول افق برنامه‌ریزی قطعی و ثابت است.

۴) گزینه ۲و۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در مدل‌های قطعی و پویا، تقاضا ثابت نمی‌باشد و هزینه‌های نگهداری فقط برای کالاهایی که از دوره‌ای بعد انتقال می‌یابند محاسبه می‌شود.

روش‌های حل مدل قطعی و پویا

هیچ کدام از روش‌های حل، جواب بهینه را برای تمامی تابع‌های هدف بدست نمی‌آورند.

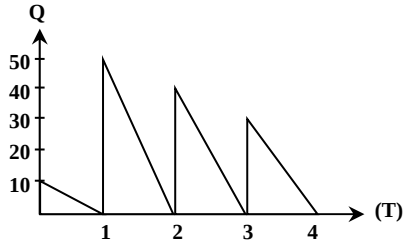
۱- روش دسته ـ دسته (lot for lot)

در این روش به ازای تقاضای هر دوره، به اندازه مدت زمان تحویل (LT) واحد زمان قبل سفارش هر دوره صادر می‌شود و در ابتدای دوره موردنظر دریافت می‌گردد و در انتهای دوره نیز موجودی صفر می‌شود.

مثال ۲: اگر مدت زمان تحویل صفر باشد در سیستم موجودی با تقاضاهای طبق جدول زیر داریم:

در ابتدای دوره اول، ۱۰واحد سفارش می‌دهیم و در ابتدای دوره دوم ۵۰ و الی آخر و نمودار موقعیت موجودی هم به صورت زیر خواهد بود:

دوره	۱	۲	۳	۴
تقاضا	۱۰	۵۰	۴۰	۳۰



نکته ۲: در این روش هزینه نگهداری صفر است چون هزینه نگهداری صرفاً برای کالاهایی است که در انتهای دوره باقی مانده و به دوره بعد می‌روند که ما در اینجا هیچ کالایی را برای دوره بعدی نگهداری نمی‌کنیم ولی در این روش هزینه سفارش‌دهی ماکزیمم خواهد شد.

(هزینه سفارش‌دهی یک دوره) × (تعداد دوره‌ها) = هزینه سفارش‌دهی

مثال۳: در صورتی که سیستم سفارش‌دهی lot for lot استفاده شود، و مدت زمان تحویل ۲ دوره باشد و تقاضا به شرح زیر باشد:

دوره	۴	۵	۶	۷
تقاضا	۵۰	۴۰	۳۰	۵۰

و هزینه نگهداری کالاهای باقی‌مانده در انتهای دوره ۵ واحد پولی باشد، هزینه نگهداری سیستم فوق از ابتدای دوره ۴ تا پایان دوره ۷ چقدر خواهد بود؟

۱) ۷۵۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۱۵۰ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون در سیستم lot for lot در پایان دوره هیچ موجودی نگهداری نمی‌شود، لذا هزینه نگهداری صفر خواهد بود.

مثال۴: در مثال فوق متوسط مقدار سفارشات صادر شده برای برآوردن تقاضاهای مذکور چقدر خواهد بود؟

۱) ۱۷۰ ۲) ۴۲/۵ ۳) ۵۰ ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای برآوردن تقاضای ۴ دوره فوق پایه ۴بار سفارش صادر شود و سفارشات صادر شده به ترتیب برابر ۵۰، ۴۰، ۳۰ و ۵۰ واحد خواهد بود لذا داریم:

$$\text{متوسط مقدار سفارشات} = \frac{۵۰+۴۰+۳۰+۵۰}{۴} = ۴۲/۵$$

۲- روش FOS (با Q دلخواه)

در این روش مقدار سفارش‌دهی ثابت است و در زمانی که میزان موجودی در دست تقاضا را برآورده نمی‌نماید به مقدار Q سفارش صادر می‌شود.

در این حالت هر مقداری که لازم داشته باشیم تنها به اندازه‌ی Q سفارش می‌دهیم طوری که هیچ‌وقت به کمبود برنخوریم.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۴۰	۵۰	۹۰	۲۰	۳۰	۷۰
سفارش صادر شده	۹۰		۹۰	۹۰		۹۰

نکته ۳: گاهی در این روش $Q^* = Q_w$ قرار می‌دهند $Q_w = \sqrt{\frac{۲DA}{h}}$ که در آن D میانگین تقاضا است.

مثال ۵: برای سیستم موجودی با تقاضاهای معین جدول زیر، از روش FOS استفاده می‌شود و هر بار به مقدار ۵۰ واحد سفارش صادر می‌شود. تعداد سفارشات صادر شده در صورتی که مدت زمان تحویل صفر باشد، چقدر خواهد بود؟

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۴۰	۲۰	۷۰	۳۰	۲۰	۲۰

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون هر موقع نیاز به کالا باشد باید به مقدار ۵۰ واحد تحویل داده شود.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۴۰	۲۰	۷۰	۳۰	۲۰	۲۰
موجودی انتهای دوره	۱۰	۰	۲۰	۴۰	۲۰	۰
سفارش صادر شده	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۰	۰

مثال ۶: در مثال فوق، متوسط مقدار سفارشات صادر شده چقدر می‌باشد؟

۱) ۵۷ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۲» در سیستم FOS، هر بار به مقدار Q واحد سفارش صادر می‌شود. میانگین سفارشات $= \frac{۴ \times ۵۰}{۴} = ۵۰$

روش دوره ثابت T

در این روش همواره به اندازه تقاضای n دوره سفارش می‌دهیم. معمولاً این روش هزینه نگهداری کمتری از روش مقدار ثابت است.

نکته ۴: گاهی این دوره ثابت T را با کمک رابطه $T^* = \sqrt{\frac{۲A}{hD}}$ به دست می‌آورند.

۳ـ روش حداقل هزینه هر واحد (LUC):

در این روش هدف حداقل نمودن هزینه سفارش‌دهی و نگهداری به ازای هر واحد سفارش است.

الگوریتم حل مدل:

گام اول: ابتدا فقط برای دوره اول سفارش را در نظر می‌گیریم. مجموع هزینه سفارش‌دهی و نگهداری را بدست آورده و تقسیم بر تعداد واحد سفارش داده شده می‌نمایم. عدد حاصل را $UC_۱$ می‌نامیم.

گام دوم: سفارش دوره بعدی را هم با سفارش‌های داده شده تاکنون جمع نموده و برای این تعداد سفارش هزینه سفارش‌دهی و نگهداری را محاسبه نموده و تقسیم بر کل واحدهای سفارش شده می‌نماییم و UC_i می‌نامیم.

گام سوم: اگر $UC_i > UC_{i-۱}$ بود توقف نموده برای $i-۱$ دوره سفارش می‌دهیم. در غیر این صورت گام دوم را مجدداً اجرا می‌نماییم.

به صورت دیگر می‌توان گفت $UC_j = \frac{A + h\sum_{i=۱}^{j}(i-۱)\,D_i}{\sum_{i=۱}^{j} D_i}$ را برای nتا $j=۱$ (از $j=۱$ به سمت $j=n$) محاسبه می‌کنیم. هنگامی که برای اولین بار سیر UC_jها صعودی شد j بهینه مقدار قبلی است.

نکته ۵: هدف روش LUC پیدا کردن تعداد دوره‌ای است که سفارش یکجا به اندازه مجموع تقاضاهای آن‌ها کمترین هزینه کل (سفارش‌دهی + نگهداری) به ازای واحد را داشته باشد.

مثال ۷: مصرف کالایی طی ۸ ماه آینده به صورت زیر خواهد بود. هزینه سفارش‌دهی این کالا برابر با ۲۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد برابر ۳ تومان می‌باشد. براساس روش LUC مقدار سفارش دوره اول را مشخص نماید:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۰	۶۰	۳۰	۱۵	۱۰	۲۰	۱۵	۴۰

پاسخ:

سال	هزینه	مقدار سفارش	دوره
۲۰	۲۰۰	۱۰	۱
$\frac{۳۸۰}{۷۰} = ۵/۴۲$	۲۰۰+۶۰×۳	۷۰	۲ و ۱
۵/۶	۲۰۰+۱۸۰+۱۸۰	۱۰۰	۳ و ۲ و ۱

چون با سفارش برای ۳ دوره اول افزایش UC را خواهیم داشت لذا برای دو دوره اول یعنی $Q = ۷۰$ واحد سفارش می‌دهیم.

فصل نهم

« برنامه‌ریزی جمعی (Aggregate planning) »

برنامه‌ریزی جمعی برنامه‌ریزی میان‌مدت تولید بوده و معمولاً برای یک دوره زمانی یکساله انجام می‌شود. در برنامه‌ریزی جمعی با توجه به تخمین تقاضای سالانه نسبت به برنامه‌ریزی تامین نیروی انسانی، اضافه‌کاری‌ها، موجودی انبار مواد و قطعات مصرفی و قراردادهای ساخت قطعات در خارج از شرکت اقدام می‌شود.

روش‌های مختلف برنامه‌ریزی جمعی

۱ـ رویکرد حسی (Intuitive Approach)

رویکرد حسی در برنامه‌ریزی جمعی یک روش شهودی بوده و نمونه آن تکرار برنامه تولید سال گذشته یک شرکت با تعدیلات جزئی برای سال آینده است. رویکرد برنامه‌ریزی جمعی حسی معمولاً متاثر از نظر مدیران صاحب نفوذ در شرکت است. نمونه آن اعمال نظر مدیران فروش و مالی در تنظیم برنامه جمعی تولید شرکت‌ها است. مدیران فروش علاقه‌مند به وجود انبار محصولات برای پاسخگویی به تقاضای مشتریان بوده، در صورتی‌که مدیران مالی علاقه‌مند به آزاد شدن سرمایه راکد در انبارها از طریق کاهش موجودی انبارها می‌باشند. بدیهی است که هر کدام از دو گروه مدیران فوق که نفوذ بیشتر در سازمان تولیدی داشته باشند، در تنظیم برنامه شهودی تولید جمعی سال آینده در شرکت بیشتر تأثیرگذار خواهند بود.

۲ـ روش نموداری (Graphical and charting methods)

روش نموداری، ساده‌ترین و ابتدایی ترین روش برای برنامه‌ریزی جمعی می‌باشد. ساده‌ترین روش برنامه‌ریزی جمعی سالانه، برنامه جمعی بر اساس متوسط تقاضای ماهانه کلیه محصولات تولیدی شرکت است.

نکته۱: برنامه‌ریزی جمعی یا برنامه‌ریزی ادغامی به علت اینکه برای کلیه محصولات تولیدی کارخانه به صورت یکجا برنامه‌ریزی می‌نماید، به این نام مشهور شده است. به عنوان مثال کارخانه خودروسازی برنامه‌ریزی می‌نمایند ۲۰۰۰۰۰ خودرو در سال آینده تولید نماید و نه ۵۰۰۰۰ خودرو نوع ۱، ۱۵۰۰۰۰ خودروی نوع ۲

مثال ۱: متوسط تقاضای ماهانه محصولات کارخانه‌ای به صورت جدول زیر است. در صورتی که کارخانه بخواهد برنامه‌ریزی جمعی محصولات خود را برای سال آینده بر اساس متوسط تقاضای محصولات به انجام برساند، بر اساس چه تعداد محصول باید برنامه‌ریزی نماید؟

ماه	متوسط تقاضای محصول ۱	متوسط تقاضای محصول ۲
فروردین	۵۰۰ عدد	۴۰۰
اردیبهشت	۱۰۰۰عدد	۴۰۰
خرداد	۱۲۰۰عدد	۴۰۰

۱) ۹۰۰ ۲) ۶۵۰ ۳) ۹۰۰ و ۴۰۰ ۴) ۱۳۰۰

پاسخ: گزینه «۴» برنامه‌ریزی جمعی برای کلیه محصولات کارخانه به صورت یکجا انجام می‌شود و لذا گزینه ۳ اشتباه می‌باشد. باید بر اساس متوسط سالیانه برنامه‌ریزی انجام شود. متوسط تقاضا برای محصول ۱، $\frac{۵۰۰+۱۰۰۰+۱۲۰۰}{۳}=۹۰۰$ و برای محصول ۲، ۴۰۰ واحد می‌باشد، لذا برنامه‌ریزی جمعی باید برای ۱۳۰۰ = ۴۰۰ + ۹۰۰ واحد محصول در ماه انجام گیرد.

تجزیه و تحلیل هزینه طرح‌های مختلف برنامه‌ریزی جمعی با استفاده از روش نموداری:

هزینه کل برنامه‌های مختلف جمعی از طریق اطلاعات هزینه‌ای مربوط به آن محاسبه می‌شود. این بخش را با یک مثال تشریح می‌نماییم.

مثال ۲: اطلاعات هزینه‌ای کارخانه ای برای تولید محصولات به شرح زیر می‌باشد، مطلوب است محاسبه هزینه طرح‌های مختلف تولید.

شرح	مقدار
هزینه انبار داری	۵ ریال در واحد محصول در ماه
هزینه قراد اد ساخت در خارج	۱۰ ریال در واحد محصول
دستمزد در ساعت عادی	۵ ریال در ساعت (۴۰ ریال در روز)
دستمزد در ساعات اضافه‌کاری	۷ ریال در ساعت
زمان مورد نیاز برای تولید هر واحد محصول	۱/۶ ساعت
هزینه افزایش تولید	۱۰ریال در هر واحد افزایش تولید
هزینه کاهش تولید	۱۵ ریال در هر واحد کاهش تولید

پیش‌بینی درماه‌های مختلف از جدول زیر پیروی می‌نماید.

ماه	پیش‌بینی تقاضا	روز کاری	تقاضا در هر روز
۱	۹۰۰	۲۲	$\frac{۹۰۰}{۲۲}=۴۱$
۲	۷۰۰	۱۸	۳۹
۳	۸۰۰	۲۱	۳۸
۴	۱۲۰۰	۲۱	۵۷
۵	۱۵۰۰	۲۲	۶۵
۶	۱۱۰۰	۲۰	۵۵
جمع	۶۲۰۰	۱۲۴	

متوسط تقاضای روزانه برابر است با $\frac{۶۲۰۰}{۱۲۴}=۵۰$ واحد در روز

هزینه طرح ۱: استفاده از نیروی کار ثابت

در طرح ۱ برنامه جمعی تولید به صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. برنامه جمعی طرح ۱ بر اساس متوسط تقاضای ماهانه تنظیم شده و مقدار آن با توجه به اطلاعات جدول فوق مساوی ۵۰ واحد محصول در ماه است. در طرح ۱ نیروی کار ثابت در نظر گرفته شده و اضافه‌کاری و قرارداد با خارج مورد نظر نبوده و اضافه‌تولید در سه ماهه اول در انبار ذخیره شده و در ماه‌های بعد مصرف می‌شود. در طرح فوق موجودی انبار در ابتدا و انتهای دوره برنامه‌ریزی صفر در نظر گرفته می‌شود.

در طرح برنامه جمعی تولید تعداد واحد محصول انبار شده درکل دوره برنامه‌ریزی ۱۸۵۰ واحد محصول است. در طرح۱ نیروی کار ثابت مورد نیاز برای تولید ۵۰ واحد محصول در روز به صورت زیر است.

$$\text{تعداد کارگر مورد نیاز}=\frac{(\text{زمان تولید مورد نیاز})\times(\text{محصول})}{(\text{ساعات کار روزانه})}=\frac{۵۰\times ۱/۶}{۸}=۱۰\ \text{کارگر}$$

هزینه کل طرح به صورت جدول زیر است.

ماه	تولید بر اساس ۵۰ واحد در روز	پیش‌بینی تقاضا	موجودی آخر ماه
۱	۱۱۰۰	۹۰۰	+۲۰۰
۲	۹۰۰	۷۰۰	+۴۰۰
۳	۱۰۵۰	۸۰۰	+۶۵۰
۴	۱۰۵۰	۱۲۰۰	+۵۰۰
۵	۱۱۰۰	۱۵۰۰	+۱۰۰
۶	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۰
جمع			۱۸۵۰

هزینه طرح عبارت است از:

هزینه نیروی انسانی + هزینه انبار = هزینه طرح

۹۲۵۰ = (هزینه نگهداری در ماه) ۵ × (محصول) ۱۸۵۰ = هزینه انبار

۴۹۶۰۰ = (روزکاری) ۱۲۴ × (مزد ساعتی) ۵ × (ساعت کاری روزانه) ۸ × (کارگر) ۱۰ = هزینه نیروی انسانی

لذا کل هزینه طرح ۱ برابر است با ۵۸۸۵۰

طرح ۲ : استفاده از نیروی کار ثابت حداقل

در برنامه جمعی تولید ۲ از حداقل نیروی کار ثابت استفاده شده و کسری تولید از طریق قرارداد با سایر تولیدکنندگان تأمین می‌شود.بنا به اطلاعات مسئله حداقل تقاضای روزانه ۳۸ واحد محصول بوده بنابر این حداقل نیروی کار مورد نیاز به صورت زیر است.

$$\frac{(\text{زمان مورد نیاز برای تولید هر واحد محصول})\ ۱/۶ \times (\text{واحد محصول})۳۸}{(\text{ساعت کار روزانه})\ ۸} = ۷/۶$$

در برنامه جمعی ۲ از ۷ کارگر تمام‌وقت و ۱ کارگر نیمه‌وقت استفاده نموده و کسری تولید از طریق قرارداد با سایر تولیدکنندگان تأمین شده و میزان آن به صورت زیر است.

تولید داخلی ۴۷۱۲ = (تعداد روزهای کار) ۱۲۴ × (تولید روزانه) ۳۸

تولید خارجی ۱۴۸۸ = (تولید داخلی) ۴۷۱۲ - (تقاضای کل) ۶۲۰۰

هزینه کلی طرح جمعی ۲ در جدول زیر نشان داده شده است.

هزینه طرح برنامه جمعی تولید ۲

هزینه نیروی کار معمولی	۳۷۶۹۶- = (روزکار) ۱۲۴ × (ساعت کار روزانه) ۸ × (کارگر) ۷/۶
هزینه قرارداد با بیرون	۱۴۸۸- = (هزینه تأمین از خارج هر واحد محصول) ۱۰ × (محصول) ۱۴۸۸
جمع کل هزینه	۵۲۵۷۶

هزینه طرح ۳: برنامه جمعی تولید بر اساس تقاضا

در طرح برنامه جمعی ۳، برنامه تولید جمعی مطابق تقاضای ماهانه بوده و تغییر نیروی انسانی بر اساس تغییر تقاضای ماهانه انجام می‌شود. هزینه کل طرح ۳ بر اساس هزینه استخدام ۱۰ ریال برای کارگر جدید و هزینه ۱۵ ریال برای بیکاری هر کارگر بصورت جدول زیر است.

هزینه طرح برنامه جمعی تولید ۳

ماه	پیش‌بینی تقاضا	هزینه تولید اولیه	هزینه افزایش نیروی کار	هزینه کاهش نیروی کار	جمع
۱	۹۰۰	۷۲۰۰	-	-	۷۲۰۰
۲	۷۰۰	۵۶۰۰	-	۳۰۰۰	۸۶۰۰
۳	۸۰۰	۶۴۰۰	۱۰۰۰	-	۷۴۰۰
۴	۱۲۰۰	۹۶۰۰	۴۰۰۰	-	۱۳۶۰۰
۵	۱۵۰۰	۱۲۰۰۰	۳۰۰۰	-	۱۵۰۰۰
۶	۱۱۰۰	۸۸۰۰	-	۶۰۰۰	۱۴۸۰۰
جمع		۴۹۶۰۰	۸۰۰۰	۹۰۰۰	۴۹۶۰۰

مدرسان شریف

فصل دهم

« برنامه‌ریزی تامین مواد »

برنامه‌ریزی تأمین مواد (Material Requirements planning)

برنامه‌ریزی تامین مواد (MRP) یک سیستم اطلاعاتی برنامه‌ریزی برای سفارش ساخت و تولید قطعات و سفارش مواد اولیه برای محصولات نهایی در برنامه‌ریزی اصلی تولید است. در سیستم MRP، سفارش محصولات نهایی با توجه به اقلام مصرفی (Bills of moterial) و زمان تولید آنها به برنامه سفارش ساخت و تولید تبدیل می‌شود.

برنامه اصلی تولید (Master Production Schedule)

برنامه اصلی تولید **(MPS)** یکی از ورودی‌ها اصلی سیستم MRP است. برنامه اصلی تولید، برنامه هفتگی یا ماهانه تولید محصولات مختلف یک شرکت را با توجه به برنامه جمعی تولید سالانه (Aggregate production plan) آنها را نشان می‌دهد. برنامه اصلی تولید نمونه‌ای یک شرکت در جدول زیر نشان داده شده است. توجه داریم که مجموع برنامه تولید ماهانه محصولات مختلف تولیدی هر شرکت مساوی برنامه تولید جمعی ماهانه آن است.

در سیستم MRP با استفاده از اطلاعات برنامه اصلی تولید و ساختار محصول، نسبت به تنظیم برنامه ساخت قطعات و برنامه سفارش قطعات و مواد مصرفی اقدام می‌شود.

نمونه‌ای از MPS

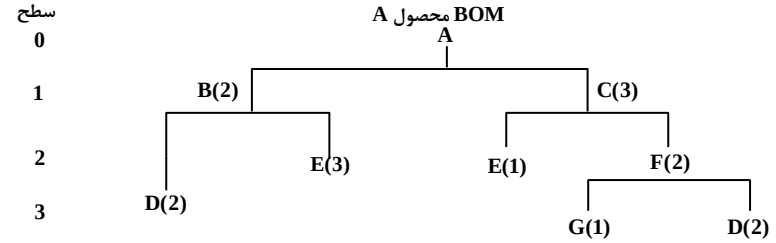
ماه	۱				۲				۳			
برنامه تولید جمعی	۵۵۰				۴۰۰				۱۰۰۰			
هفته	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
محصول ۱	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۰	۱۰۰	۰	۱۰۰	۵۰	۲۰۰	۸۰	۰	۰
محصول ۲	۰	۱۰۰	۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۰	۵۰	۱۰۰	۱۲۰	۲۰۰	۳۰۰

جدول ۱

لیست قطعات (Bills of Materials)

لیست قطعات (BOM)، لیست کلیه قطعات و اقلام مصرفی در محصول نهایی را نشان می‌دهد. لیست قطعات ساختار سلسله مراتبی ساخت و مونتاژ محصول نهایی را نشان می‌دهد. نمونه‌ای از لیست قطعات در شکل زیر نشان داده شده است. در این شکل اعداد داخل پرانتز نشان‌دهنده تعداد قلم مورد نیاز برای ساخت محصول است. در شکل فوق قلم مصرفی D برای قطعه B، برای راحتی محاسبات MRP به جای سطح ۲ در سطح ۳ نشان داده شده است. در MRP نمایش اقلام مصرفی در پایین‌ترین سطح ممکنه به کدگذاری در پایین‌ترین سطح (Low Level Coding) معروف است.

BOM محصول A



سیستم MRP

در سیستم MRP با توجه به ساختار درختی محصول (BOM) زمان ساخت قطعات ((Lead time(LT)) و وضعیت موجودی اقلام و سفارش‌های انجام شده، به صورت عقب‌گرد از روی برنامه اصلی تولید (MPS) نسبت به تعیین برنامه ساخت و تولید اقلام مورد نیاز اقدام می‌شود.

مثال۱: مقدار ۵۰ واحد محصول A در هفته هشتم مورد نیاز است. اطلاعات مواد سازنده این محصول به شرح جدول زیر است. مطلوب است نمودار برنامه‌ریزی MRP محصول A با روش دسته‌به دسته (Lot for lot)

جدول ۲

قلم	موجودی	زمان ساخت (دقیقه)
A	۱۰	۱
B	۱۵	۲
C	۲۰	۱
D	۱۰	۱
E	۱۰	۲
F	۵	۳
G	۰	۲

محصول	کد پائین‌ترین سطح	موجودی در دست	LT (هفته)		هفته							
					۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
A	۰	۱۰	۱	مقدار مورد نیاز کلی								۵۰
				خالص مورد نیاز								۴۰
				برنامه دریافت							۴۰	۴۰
				برنامه سفارش						۴۰		
B	۱	۱۵	۲	مقدار مورد نیاز کل							۸۰ A	
				خالص مورد نیاز							۶۵	
				برنامه دریافت							۶۵	
				برنامه سفارش					۶۵			
C	۱	۲۰	۱	مقدار مورد نیاز کل							۱۲۰ A	
				خالص مورد نیاز							۱۰۰	
				برنامه دریافت							۱۰۰	
				برنامه سفارش						۱۰۰		
E	۲	۱۰	۲	مقدار مورد نیاز کل						۱۳۰ B	۲۰۰ C	
				خالص مورد نیاز						۱۲۰	۲۰۰	
				برنامه دریافت						۱۲۰	۲۰۰	
				برنامه سفارش					۱۲۰	۲۰۰		
F	۲	۵	۳	مقدار مورد نیاز کل						۲۰۰ C		
				خالص مورد نیاز						۱۹۵		
				برنامه دریافت						۱۹۵		
				برنامه سفارش			۱۹۵					
D	۳	۱۰	۱	مقدار مورد نیاز کل					۱۳۰ B			
				خالص مورد نیاز			۳۸۰		۱۳۰			
				برنامه دریافت			۳۸۰		۱۳۰			
				برنامه سفارش		۳۸۰		۱۳۰				
D	۳	۰	۲	مقدار مورد نیاز کل			۱۹۵ F					
				خالص مورد نیاز			۱۹۵					
				برنامه دریافت			۱۹۵					
				برنامه سفارش	۱۹۵							

در سیستم MRP برنامه سفارش و ساخت و تولید اقلام مختلف با توجه به مصرف آنها در مونتاژ محصولات مختلف و فروش مستقیم آنها قابل تنظیم است.

پویایی سیستم MRP

سیستم MRP یک سیستم ثابت نبوده و به راحتی در آن تغییر در سفارش مشتری، تغییر در برنامه تولید به خاطر کمبود مواد و خرابی احتمالی ماشین‌ها و تغییر در طرح محصول قابل اعمال است. در سیستم MRP کلیه تغییرات فوق از طریق اجرای دوره‌ایی سیستم برای کلیه محصولات و زیرمجموعه آنها و یا انجام فوری تغییرات در زمان وقوع آنها برای محصول مورد نظر و اقلام متأثر از آن قابل اعمال است.

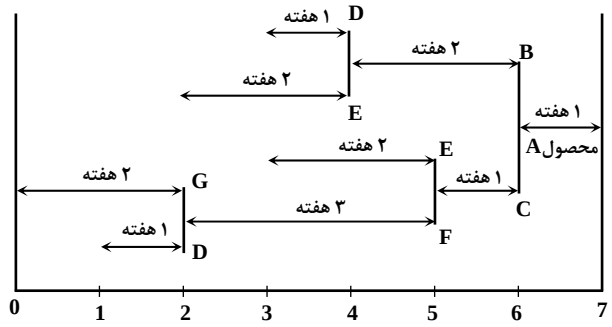
توجه داریم که در کاربرد عملی سیستم‌های MRP بسیاری از شرکت‌ها تغییرات جزئی برنامه‌ای را نادیده گرفته و تمایلی به اعمال آنها در برنامه MRP ندارند. تغییرات جزیی و مکرر در میزان سفارش مشتری، طرح محصول و تغییر ظرفیت بخش‌ها باعث بهم‌خوردگی کارکرد سیستم MRP شده و باید از آن اجتناب شود.

یکی از وظایف مهم مدیران علملیات جلوگیری و کاهش از عصبیت‌های فوق از طریق ارزیابی نیازها برای تغییرات فوق و تأثیر تغییرات فوق بر سایر بخش‌های تولید است. برای جلوگیری و کاهش عصبیت‌های سیستم MRP از ابزارهای زیر می‌توان کمک گرفت.

حفاظ زمانی (Time fence)

حفاظ زمانی بخشی از برنامه اصلی تولید (MPS) که ثابت فرض شده و تغییر در آن مجاز نمی‌باشد، است. در سیستم MRP حفاظ زمانی برای هر محصول مساوی حداقل زمان لازم برای تکمیل آن در ساختار زمانی تکمیل محصول نهایی است.

به عنوان مثال، اگر لیست قطعات و زمان تحویل (LT) هر یک از قطعات محصول A به صورت جدول زیر باشد، دراین صورت زمان تحویل محصول مطابق نمودار ساختار زمانی شکل زیر مساوی ۷ هفته است. بنابر این در رکوردهای MRP حفاظ زمانی برای محصول A حداقل مساوی ۷ هفته بوده و در رکوردهای MRP امکان تغییرسفارش محصول فوق برای ۷ هفته میسر نخواهد بود.



قطعات مصرفی در محصول A و زمان تحویل آنها

Component	Lead Time
A	۱Weak
B	۲Weak
C	۱Weak
D	۱Weak
E	۲Weak
F	۳Weak
G	۲Weak

Pegging

pegging یک روش پیگیری تغییرات سلسله مراتبی در رکوردهای MRP است. یک مثال از Pegging رکوردهای MRP در شکل زیر نشان داده شده است. در این مثال اگر برنامه تحویل ۲۰ قطعه C در هفته اول به دلیل خرابی ماشین یا کسری مواد اولیه میسر نشود، در این صورت برنامه سفارش ۲۰ قطعه C در هفته اول به دلیل خرابی ماشین یا کسری مواد اولیه میسر نشود، در این صورت برنامه سفارش ۲۰ قطعه B در هفته اول و ۲۰ قطعه A در هفته دوم باید حذف شده و رکوردهای MRP فوق مورد بازنگری قرار گیرد.

به صورت مشابه اگر در هفته هفتم سفارش محصول A از ۱۰واحد به ۲۰واحد افزایش یابد، در این صورت برنامه سفارش اقلام وابسته به A نیز باید به صورت سلسله‌مراتبی مورد تجدید نظر قرار گرفته و اصطلاحات لازمه در آن انجام شود. در MRP به تجدیدی نظر رکوردها از بالا به پایین و یا از پایین به بالا Pegging گویند.

مدرسان شریف

فصل یازدهم

« برنامه‌ریزی کوتاه‌مدت »

برنامه‌ریزی کوتاه مدت (Short term scheduling tactics)

در برنامه‌ریزی کوتاه‌مدت زمان عملیات و ترتیب عملیات در داخل بخش‌های سازمان مشخص می‌گردد. برنامه‌ریزی کوتاه مدت در بخش‌های خدماتی مثل بیمارستان‌ها شامل برنامه‌ریزی هفتگی از اتاق‌های عمل، برنامه هفتگی کار پزشکان و پرستاران می‌باشد.

روش‌های مختلف برنامه‌ریزی کوتاه‌مدت

برنامه‌ریزی کوتاه مدت در سازمان به یکی از صورتهای زیر است.

۱ـ برنامه‌ریزی عملیات کارگاهی (Job Shop Scheduling)

۲ـ برنامه ریزی تولید دسته‌ای (Batch Production Scheduling)

۳ـ برنامه‌ریزی عملیات درخطوط مونتاژ (Line Scheduling)

برنامه‌ریزی عملیات کارگاهی (Job Shop Scheduling)

برنامه‌ریزی عملیات کارگاهی شامل تخصیص کارها به مراکز کاری (Loading) و توالی انجام کارها در مراکز کاری (Sequencing) است.

تخصیص کارها به مراکز کاری (Loading): برنامه‌ریزی تخصیص کارها به مراکز کاری به مفهوم تخصیص کارها به مراکز کاری و تجهیزات تولیدی در کارگاهها است. در برنامه‌ریزی تخصیص کارها به مراکز کاری، اگر کارها فقط توسط مراکز کاری اختصاصی قابل انجام باشد در این صورت برنامه‌ریزی بسیار ساده‌تر از مواردی که کارها در مراکز مختلف قابل انجام است، می‌باشد. در مورد اخیر مسئله انتخاب بهترین مراکز کاری برای انجام کارها به توجه معیار حداقل هزینه آماده‌سازی و انجام کارها توسط مراکز فوق و یا حداقل زمان بیکاری و یا حداقل زمان تکمیل کارها در مراکز فوق است.

در برنامه‌ریزی تخصصی کارها به مراکز کاری از نمودار گانت و یا روش تخصیص (Assignment) استفاده می‌شود.

نمودار گانت: نمودار گانت یک ابزار تصویری برای زمان‌بندی و تخصیص کارها به مراکز کاری است. از طریق نمودار گانت برنامه تخصیص منابع به کارها و میزان پیشرفت آنها در مراکز کاری قابل نمایش است.

از طریق نمودار گانت و از طریق سعی و خطا برنامه‌های مختلف تخصیص منابع به کارها قابل نمایش است. مثال نمونه‌ای آن تنظیم برنامه درسی کلاس‌ها در محیط‌های آموزشی و دانشگاهها است. یک مثال کاربردی نمودار گانت دربرنامه‌ریزی کلاس‌های درسی در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱ . نمایش برنامه‌ریزی کلاس ها به وسیله نمودار گانت

اطاق	۸	۹/۳۰	۱۱	۱۲/۳۰	۱۳	۱۴/۳۰	۱۶	۱۷/۳۰
۱۰۰	ریاضی ۱	ریاضی ۲			اقتصاد ۱	اقتصاد ۲		
۱۰۱	حسابداری ۱	حسابداری ۲			مدیریت عملیات			
۱۰۲	تئوری صف				آمار ریاضی ۱	آمار ریاضی ۲		
۱۰۳	تحقیق در عملیات							

از نمودار گانت برای نمایش کار و بیکاری ماشین‌ها و یا مراکز کاری نیز می‌توان استفاده نمود. نمودار گانت بارگذاری (Gantt Load Chart)، کار و بیکاری مراکز تولید را نشان می‌دهد. یک مثال از نمودار گانت بارگذاری در جدول ۲ نشان داده شده است. در این مثال مرکز کاری اول دارای بارگذاری

کامل بوده و سایر مراکز کاری دارای بیکاری هستند. علامت ضربدر نشان دهنده بیکاری مراکز کاری بخاطر عملیات تعمیرات نگهداری است. از نمودار بارگذاری گانت برای تخصیص مناسب منابع به کارها می‌توان استفاده کرد.

جدول ۲. نمودار بارگذاری گانت

روز / مراکز کاری	شنبه	یک‌شنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
عملیات فلزی	قطعه ۳۴۹			قطعه ۳۵۰	
مکانیکال		قطعه ۳۴۹		قطعه ۴۰۸	
الکتریکال	قطعه ۴۰۸			قطعه ۳۴۹	
نقاشی	قطعه ۲۹۵		قطعه ۴۰۸		قطعه ۳۴۹

مشغول بیکار توقف برای تعمیرات

روش تخصیص (Assignment Method): روش تخصیص، یک روش خاص برنامه‌ریزی خطی برای تخصیص کارها به افراد یا ماشینها است. هدف از روش تخصیص تعیین تخصیص بهینه کارها به منابع تولید است. در روش تخصیص تعداد کارها و تعداد منابع تولیدی مساوی بوده و هر کار فقط به یک منبع تولید تخصیص داده می‌شود. هدف از روش تخصیصی، تخصیص کارها به منابع تولیدی برای حداقل هزینه کل انجام کارها و یا حداقل زمان تکمیل آنها است. یک مثال از هزینه انجام کارها توسط ماشینهای مختلف در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳. هزینه انجام کارها توسط ماشینهای مختلف

کار	ماشین A	ماشین B	ماشین C
۱	۱۱	۱۴	۶
۲	۸	۱۰	۱۱
۳	۹	۱۲	۷

حل بهینه مسئله تخصیص جدول فوق با استفاده از روش زیر انجام می‌شود.

۱ـ برای کلیه سطرهای جدول، کوچکترین عدد هر سطر از کلیه عناصر سطر مربوطه و کوچکترین عدد هر ستون از کلیه عناصر ستون مربوطه کم می‌شود. به وسیله این کار تعدادی صفر در سطرها و ستون‌های جدول هزینه‌ها به دست آمده که اصطلاحاً به آنها هزینه فرصت صفر (Zero opportunity cost) گویند.

۲ـ حداقل تعداد خطوط افقی و عمودی قابل عبور از کلیه صفرها را رسم کرده، اگر تعداد خطوط فوق مساوی تعداد کارها باشد، در این صورت جواب بهینه از تخصیص کارها به مراکزی که هزینه فرصتهای آنها صفر است به دست آمده، در غیر این صورت مرحله ۳ انجام می‌شود.

۳ـ کوچکترین عدد غیرصفر در مرحله قبل را از کلیه اعداد صفر جدول کم کرده و عدد فوق را به محل تلاقی خطوط اضافه نموده و مرحله ۲ مجدداً تکرار شود.

حل بهینه مسئله جدول فوق با توجه به دستورالعمل پیشنهادی به صورت زیر است.

جدول ۴. محاسبه هزینه فرصت‌های صفر

ماشین / کار	A	B	C
۱	۵	۶	۰
۲	۰	۲	۳
۳	۲	۳	۰

جدول ۵. تعیین حداقل تعداد خطوط افقی و عمودی پوشش‌دهنده صفرها

کار \ ماشین	A	B	C
۱	۵	۶	۰
۲	۰	۲	۳
۳	۲	۳	۰

جدول ۶. تفریق حداقل هزینه غیرصفر از کلیه عناصر جدول و اضافه شدن عدد فوق بر محل تلاقی خطوط و تعیین مجدد حداقل تعداد خطوط پوشش‌دهنده صفرها.

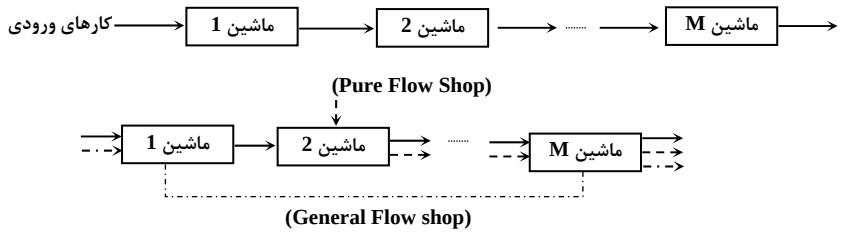
کار \ ماشین	A	B	C
۱	۳	۴	۰
۲	۰	۰	۵
۳	۰	۱	۰

در جدول اخیر چون تعداد خطوط افقی و عمودی پوشش‌دهنده صفرها مساوی تعداد کارها یا تعداد ماشین‌ها است. بنابراین به حل بهینه رسیده و جواب بهینه به صورت: تخصص کار ۱ به ماشین C، کار ۲ به ماشین B و کار ۳ به ماشین A است. هزینه کل جواب بهینه‌سازی مساوی $۲۵ = ۹ + ۱۰ + ۶$ ریال است.

توالی کارها در مراکز کاری (Sequencing of jobs in work centers)

در برنامه‌ریزی عملیات صنعتی، ترتیب انجام کارها در مراکز کاری به توالی کارها (Sequencing) معروف است. توالی کارها برای مراکز کاری تک‌پردازشی، به برنامه‌ریزی عملیات تک‌فرآیندی (Single processor scheduling) معروف است. به عنوان مثال برای برنامه‌ریزی عملیات تک‌فرآیندی، برنامه‌ریزی تولید مواد شیمیایی است. عملیات تولید مواد شیمیایی معمولاً در فرآیندهای خاص انجام می‌شود.

برنامه‌ریزی توالی کارها در مراکز کاری شامل چند ماشین یا پردازشگر به برنامه‌ریزی جریان کارگاهی (Flow Shop Scheduling) معروف است. برنامه‌ریزی جریان کارگاهی به یکی از دو صورت جریان کارگاهی خالص (Pure Flow Shop) و جریان کارگاهی عمومی (General Flow Shop) است. در جریان کارگاهی خالص، کلیه کارها در روی کلیه ماشین‌ها پردازش شده و در جریان کارگاهی عمومی، کارها با توجه به نیاز آنها، در روی ماشین‌های مختلف پردازش می‌شوند. شمای کلی جریان کارگاهی عمومی و جریان کارگاهی خالص در شکل زیر نشان داده شده است.



جریان کارگاهی عمومی و خالص

توالی کارها در عملیات تک‌فرآیندی (Single Processor Scheduling)

توالی کارها در عملیات تک‌فرآیندی بر اساس اولویت‌های شهودی (Priority Rules) نظیر پردازش کارها به ترتیب ورود آنها به سیستم (First Come First Served : FCFS) و یا پردازش کارها به ترتیب کمترین زمان عملیات آنها (Shortest Processing Time : SPT) و یا زودترین زمان تحویل (Earliest Due Date : EDD) است. روش‌های فوق و معیارهای عملکرد آنها در مثال زیر نشان داده شده است.