www.modaresanesharif.ac.ir

فصل ششم

«گراف‌های شبکه، روش‌های تجزیه و تحلیل مدار و مدار دوگان»

مثال ۱: ماتریس تلاقی مختصرشده برای گراف جهت‌دار یک مدار به صورت زیر است:

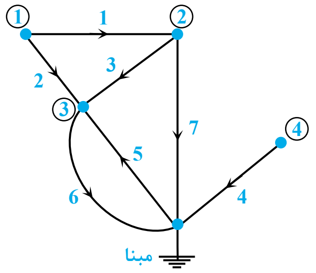
$$A=\begin{array}{c}\textbf{شماره شاخه}\\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ولتاژ کدام شاخه این مدار قابل محاسبه برحسب ولتاژ سایر شاخه‌ها نیست؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)

۱) شاخه‌های ۲ و ۳
۲) شاخه‌های ۵ و ۶
۳) شاخه ۴
۴) شاخه ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در یک مدار اگر شاخه‌ای تنها شاخه‌ی متصل به یک گره باشد، ولتاژ این شاخه را نمی‌توان برحسب سایر شاخه‌های مدار نوشت چرا که آن شاخه حداقل از یک سمت از باقی مدار منفصل است و هیچ حلقه‌ی مشترکی با سایر شاخه‌های مدار نخواهد داشت که بتوان برای آن قانون KVL را نوشت. با دقت در ماتریس تلاقی خلاصه شده گراف می‌بینیم که شاخه چهارم، تنها شاخه‌ی متصل به گره ۴ است و لذا ولتاژ این شاخه را نمی‌توان برحسب ولتاژ سایر شاخه‌های مدار نوشت. شکل ترسیم شده گراف مدار نیز مؤید این مطلب است.



$$\begin{array}{c|ccccccc} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷\\ \hline & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ A= & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & \textcircled{۱} & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}$$

شاخه ۴ام تنها شاخه متصل به گره ۴ام است

مثال ۲: ماتریس امپدانس مش برای یک مدار پسیو RLC (بدون منابع وابسته) به صورت زیر داده شده است. کدامیک از پاسخ‌های زیر قابل قبول است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $\begin{bmatrix} ۵+j & -۱+j\\ -۲+j & ۵+j۳ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱+j۲ & -(۳-j)\\ -(۳-j) & ۵+j۶ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۳+j & -۲+j\\ -۲+j & ۶+j۵ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۳+j & -(۱+j۳)\\ -(۱+j۳) & ۵+j۴ \end{bmatrix}$

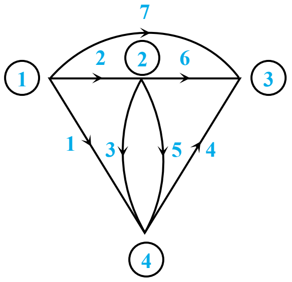
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در درجه اول با توجه به این که مدار فاقد منبع وابسته می‌باشد باید عناصر قطر فرعی ماتریس امپدانس برابر باشند، زیرا هر دو در برگیرنده منهای امپدانس مشترک دو حلقه مدار هستند. با توجه به این نکته گزینه (۱) غلط است. از طرفی با توجه به پسیو بودن مدار، مقدار تمام مقاومت‌ها مثبت می‌باشد و این دو نتیجه مهم را دربر دارد:

۱ـ قسمت حقیقی عناصر قطر اصلی ماتریس امپدانس باید مثبت باشد. پس گزینه (۳) غلط است.

۲ـ قسمت حقیقی عناصر قطر اصلی باید بزرگتر از قدرمطلق قسمت حقیقی عناصر قطر فرعی ماتریس امپدانس باشد. پس گزینه (۲) نیز غلط است.

با توضیحات ارائه شده پاسخ تست گزینه (۴) می‌باشد.

مثال ۳: در گراف نشان داده شده در شکل مقابل، چند درخت می‌توان انتخاب کرد که ولتاژ شاخه درخت‌ها همانند ولتاژ گره‌ها نسبت به مبنا باشد؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در گراف مذکور درخت‌های موجود به قرار زیر است:

(۲,۷,۱) , (۶,۷,۴) , (۱,۵,۴) , (۱,۳,۴)
(۱,۲,۶) , (۲,۶,۴) , (۲,۶,۵) , (۲,۶,۳) , (۵,۴,۲) , (۱,۳,۶) , (۷,۶,۳) , (۷,۶,۵) , (۷,۲,۳) , (۷,۲,۵) , ...

www.modaresanesharif.ac.ir

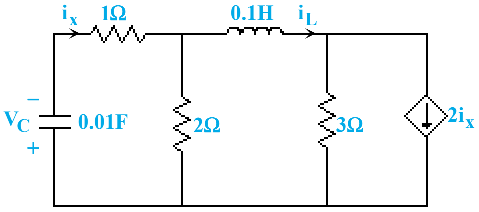
در صورتی که گره (۱) به عنوان مبنا انتخاب شود، ولتاژ شاخه‌های درخت (۲,۷,۱) را می‌توان همانند ولتاژ گره‌ها نسبت به گره مبنا نوشت. اگر گره (۲) به عنوان مبنا انتخاب شود، ولتاژ شاخه‌های درخت‌های (۲,۶,۳) و (۲,۶,۵) را می‌توان همانند ولتاژ گره‌ها نسبت به گره مبنا نوشت. حال اگر گره (۳) به عنوان گره مبنا انتخاب شود، ولتاژ شاخه‌های درخت (۶,۷,۴) را می‌توان همانند ولتاژ گره‌ها نسبت به گره مبنا نوشت. در انتها اگر گره (۴) به عنوان گره مبنا انتخاب شود، ولتاژ شاخه‌های درخت‌های (۱,۳,۴) و (۱,۵,۴) را می‌توان همانند ولتاژ گره‌ها نسبت به گره مبنا نوشت. بنابراین ۶ درخت وجود دارد که ولتاژ شاخه‌هایشان همانند ولتاژ گره‌ها نسبت به مبنا است.

فصل هفتم

«معادلات حالت»

مثال ۴: در مدار زیر، معادلات حالت را می‌توان به صورت $\frac{dX}{dt} = AX\ ,\ X = \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$ نوشت، ماتریس A برابر کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{۱}{۳} \times \begin{bmatrix} ۲۰۰ & -۱۰۰ \\ ۱۰ & -۸۰ \end{bmatrix}$

۲) $\frac{۱}{۳} \times \begin{bmatrix} ۲۰۰ & -۱۰۰ \\ ۸۰ & -۱۰ \end{bmatrix}$

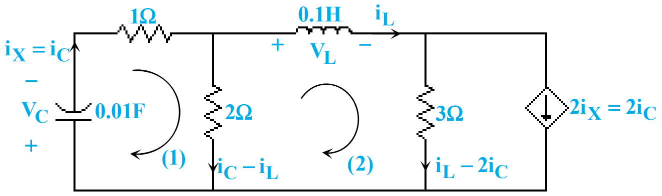
۳) $\frac{۱}{۳} \times \begin{bmatrix} -۲۰۰ & ۱۰۰ \\ -۸۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۴) $\frac{۱}{۳} \times \begin{bmatrix} -۲۰۰ & ۱۰۰ \\ -۱۰ & ۸۰ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به اندازه خازن و سلف موجود در مدار داریم:

$$i_C = \frac{۱}{۱۰۰}\frac{dV_C}{dt}\ ,\ V_L = \frac{۱}{۱۰}\frac{di_L}{dt}$$

حال مدار را به شکل زیر در نظر بگیرید که جریان تمام شاخه‌ها در آن مشخص شده است. مطابق شکل داریم:



$$KVL(۱): V_C + i_C + ۲i_C - ۲i_L = ۰ \Rightarrow V_C + \frac{۳}{۱۰۰}\frac{dV_C}{dt} - ۲i_L = ۰ \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{۲۰۰}{۳}i_L - \frac{۱۰۰}{۳}V_C \qquad (۱)$$

$$KVL(۲): V_L + ۳i_L - ۶i_C - ۲i_C + ۲i_L = ۰ \Rightarrow V_L - ۸i_C + ۵i_L = ۰$$

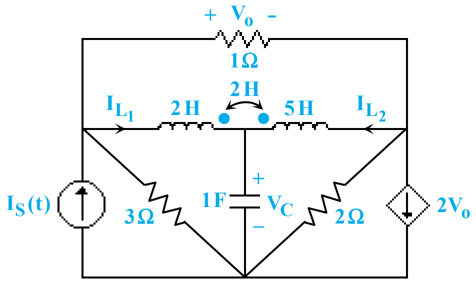
$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۰}\frac{di_L}{dt} - \frac{۸}{۱۰۰}\frac{dV_C}{dt} + ۵i_L = ۰ \xrightarrow{(۱)} \frac{۱}{۱۰}\frac{di_L}{dt} - \frac{۱۶}{۳}i_L + \frac{۸}{۳}V_C + ۵i_L = ۰ \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{۱۰}{۳}i_L - \frac{۸۰}{۳}V_C \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dV_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۰}{۳} & -\frac{۸۰}{۳} \\ \frac{۲۰۰}{۳} & -\frac{۱۰۰}{۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳} \times \begin{bmatrix} ۱۰ & -۸۰ \\ ۲۰۰ & -۱۰۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{۱}{۳} \times \begin{bmatrix} ۱۰ & -۸۰ \\ ۲۰۰ & -۱۰۰ \end{bmatrix}$$

اشتباه محاسباتی باعث شده که طراح گزینه (۱) را صحیح اعلام کند که نادرست است.

مثال ۵: اگر متغیرهای حالت را در مدار شکل مقابل به صورت (V_C و $I_{L_۲}$ ، $I_{L_۱}$) انتخاب کنیم، ولتاژ خروجی V_o ، برحسب متغیرهای حالت و منبع جریان مستقل به کدام صورت بیان می‌شود؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)



۱) $V_o = \frac{۳}{۲}I_{L_۱} + I_{L_۲} - \frac{۳}{۲}I_S(t)$

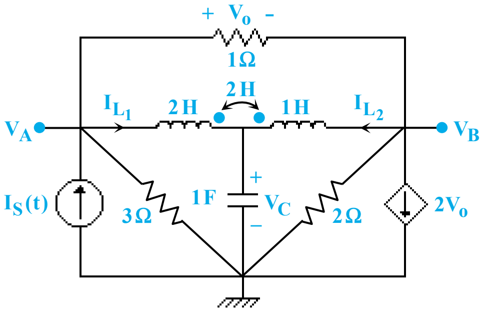
۲) $V_o = -\frac{۳}{۲}I_{L_۱} + I_{L_۲} + \frac{۳}{۲}I_S(t)$

۳) $V_o = \frac{۳}{۲}I_{L_۱} + I_{L_۲} - ۲V_C - \frac{۳}{۲}I_S(t)$

۴) $V_o = -\frac{۳}{۲}I_{L_۱} + I_{L_۲} + ۲V_C - \frac{۳}{۲}I_S$

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با نوشتن KCL در گره A رابطه (۱) و در گره B رابطه (۲) را داریم:



$$\frac{V_A}{۳}+I_{L_۱}-I_S+\frac{V_A-V_B}{۱}=۰ \qquad (۱)$$

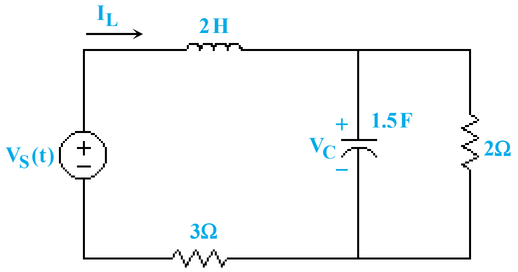
$$\frac{V_B}{۲}+I_{L_۲}+۲(V_A-V_B)+\frac{V_B-V_A}{۱}=۰ \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴V_A-۳V_B=۳I_S-۳I_{L_۱} & (۳) \\ ۲V_A-V_B=-۲I_{L_۲} & (۴) \end{cases} \xrightarrow{(۳),(۴)} \begin{cases} V_A=-\frac{۳}{۲}I_S+\frac{۳}{۲}I_{L_۱}-۲I_{L_۲}-I_{L_۲} \\ V_B=-۳I_S+۳I_{L_۱}-۴I_{L_۲} \end{cases}$$

$$\mathbf{V_o=V_A-V_B=\frac{۳}{۲}I_S-\frac{۳}{۲}I_{L_۱}+I_{L_۲}}$$

مثال ۶: **در مدار زیر، $V_C(۰)$ چند ولت و $I_L(۰)$ چند آمپر باشد تا پاسخ پله $(V_C(t))$ حالت گذرا نداشته باشد؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



۱) $I_L(۰)=۰\ ,\ V_C(۰)=۰$

۲) $I_L(۰)=۰/۲\ ,\ V_C(۰)=۰$

۳) $I_L(۰)=۰/۲\ ,\ V_C(۰)=۰/۴$

۴) $I_L(۰)=۰\ ,\ V_C(۰)=۰/۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **راه‌حل اول:** برای حل این تست ابتدا معادلات حالت مدار را محاسبه می‌کنیم. با یک KCL ساده در گره بالا و سمت راست مدار، داریم:

$$I_C=I_L-\frac{V_C}{۲}\Rightarrow ۱/۵\dot{V}_C=I_L-\frac{V_C}{۲}\Rightarrow \dot{V}_C=\frac{۲}{۳}I_L-\frac{۱}{۳}V_C$$

از طرفی با KVL زدن در حلقه سمت چپ مدار می‌توان نوشت:

$$V_L+V_C+۳I_L-V_S(t)=۰\Rightarrow ۲\dot{I}_L+V_C+۳I_L-u(t)=۰\Rightarrow \dot{I}_L=-\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۳}{۲}I_L+\frac{۱}{۲}u(t)$$

پس معادلات حالت مدار به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \dot{V}_C=-\frac{۱}{۳}V_C+\frac{۲}{۳}I_L \\ \dot{I}_L=-\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۳}{۲}I_L+\frac{۱}{۲}u(t) \end{cases}$$

برای این که پاسخ V_C فاقد حالت گذرا باشد، کافیست $\dot{V}_C$ به ازای تمامی زمان‌ها برابر صفر باشد:

$$\dot{V}_C(t)=۰\Rightarrow -\frac{۱}{۳}V_C(t)+\frac{۲}{۳}I_L(t)=۰\Rightarrow V_C(t)=۲I_L(t) \qquad (۱)$$

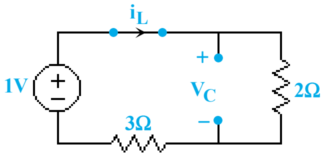
با مشتق‌گیری از رابطه بدست آمده داریم:

$$(۱)\xrightarrow{\frac{d}{dt}}\dot{V}_C(t)=۲\dot{I}_L(t)\Rightarrow \dot{I}_L(t)=۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}V_C(t)-\frac{۳}{۲}I_L(t)+\frac{۱}{۲}u(t)=۰$$

$$\xrightarrow{(۱)} -\frac{۱}{۲}V_C(t)-\frac{۳}{۴}V_C(t)+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow V_C(t)=۰/۴\ ,\ I_L(t)=\frac{۱}{۲}V_C(t)=۰/۲$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر $V_C(۰)=۰/۴v$ و $I_L(۰)=۰/۲A$ باشد، با صفر شدن مقادیر $\dot{V}_C$ و $\dot{I}_L$، پارامترهای V_C و I_L همواره در مقادیر اولیه خود باقی خواهند ماند و در این حالت هیچ پاسخ گذرایی نه برای V_C و نه برای I_L وجود نخواهد داشت.

راه‌حل دوم: برای آنکه مدار مرتبه دوم حالت گذرا نداشته باشد، لزوماً باید شرایط اولیه و ماندگار مدار یکی باشد. (دقت کنید که عکس این گزاره درست نیست.) حال مدار را در $t=\infty$ تحلیل می‌کنیم:



$$i_L(\infty)=\frac{۱}{۳+۲}=۰/۲A\ ,\ V_C(\infty)=۲i_L=۰/۴V\Rightarrow \begin{cases} i_L(۰)=۰/۲A \\ V_C(۰)=۰/۴V \end{cases}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷: معادلات حالت مداری به فرم $\dot{X}=AX+BU$ است. اگر ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۳\\ -۱ & -۵\end{bmatrix}$ باشد، پاسخ ضربه مدار به چه صورتی می‌تواند باشد؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)

۱) $Ae^{-۶t}+Be^{-۲t}$

۲) $Ae^{-۶t}+tBe^{-۶t}$

۳) $e^{-\sqrt{۲}t}(A\cos ۴t+B\sin ۴t)$

۴) $e^{-۴t}(A\cos\sqrt{۲}t+B\sin\sqrt{۲}t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم که در پاسخ ضربه‌ی هر مدار، فرکانس‌های طبیعی مدار ظاهر می‌شوند که همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس حالت سیستم هستند؛ برای ماتریس حالت داده شده، مقادیر ویژه به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\det[SI-A]=\begin{vmatrix}S+۳ & -۳\\ ۱ & S+۵\end{vmatrix}=(S+۳)(S+۵)-۱\times(-۳)=S^۲+۸S+۱۸=۰\Rightarrow S_{۱,۲}=-۴\pm j\sqrt{۲}$$

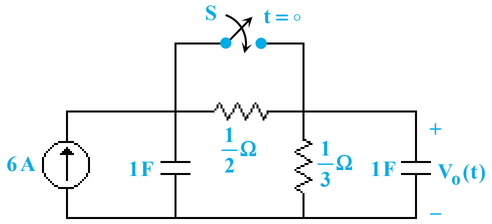
لذا پاسخ ضربه مدار به شکل مقابل می‌باشد: $h(t)=e^{-۴t}(A\cos\sqrt{۲}t+B\sin\sqrt{۲}t)$

فصل هشتم

«تبدیل لاپلاس و تابع شبکه»

مثال ۸: در مدار شکل زیر کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در $t=۰$ بسته می‌شود. ولتاژ خروجی $V_o(t)$، برای $t>۰$ کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)



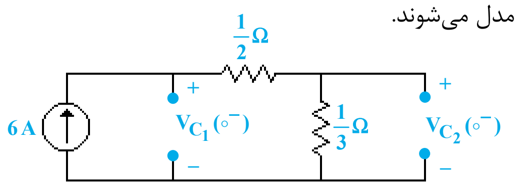
۱) $۲-۱/۵e^{-۱/۵t}$

۲) $۲+۱/۵e^{-۱/۵t}$

۳) $۳-۰/۵e^{-۱/۵t}$

۴) $۳+۰/۵e^{-۱/۵t}$

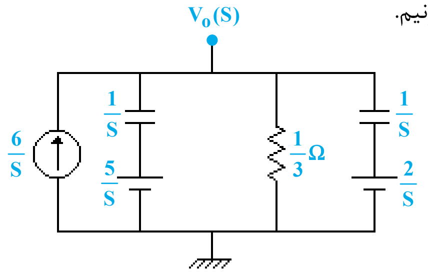
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان خازن‌ها با مدار باز مدل می‌شوند.



$$V_{C_۱}(۰^-)=۶(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})=۵v \quad و \quad V_{C_۲}(۰^-)=۶\times\frac{۱}{۳}=۲v$$

لازم به ذکر است که به علت تشکیل حلقه خازنی بعد از اتصال کلید، $V_C(۰^-)=V_C(۰^+)$ برقرار نمی‌باشد.

با توجه به ولتاژهای اولیه خازن‌ها، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و در گره بالای مدار KCL می‌زنیم.



$$\frac{V_o(S)-\frac{۵}{S}}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_o(S)}{\frac{۱}{۳}}+\frac{V_o(S)-\frac{۲}{S}}{\frac{۱}{S}}=\frac{۶}{S}$$

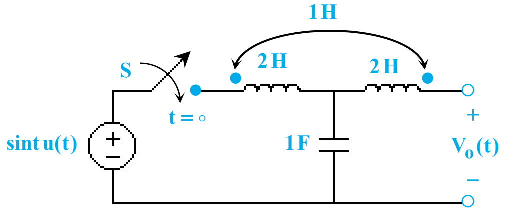
$$\Rightarrow SV_o(S)-۵+۳V_o(S)+SV_o(S)-۲=\frac{۶}{S}$$

$$\Rightarrow V_o(S)=\frac{\frac{۶}{S}+۷}{۳+۲S}=\frac{۶}{S(۲S+۳)}+\frac{۷}{۲S+۳}\Rightarrow V_o(S)=\frac{۲}{S}+\frac{-۴}{۲S+۳}+\frac{۷}{۲S+۳}=\frac{۲}{S}+\frac{۳}{۲S+۳}$$

$$\Rightarrow V_o(S)=\frac{۲}{S}+\frac{۳}{۲(S+\frac{۳}{۲})}\Rightarrow \mathbf{V_o(t)=(۲+۱/۵e^{-۱/۵t})u(t)}$$

مثال۹: **در مدار شکل زیر $V_o(S)$ کدام است؟ کلید S در $t=۰$ بسته می‌شود.**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)



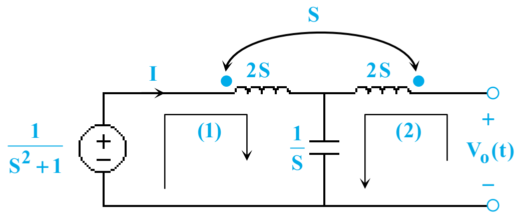
۱) $\frac{۱}{S^۲+۱}$

۲) $\frac{۱}{۲S^۲+۱}$

۳) $\frac{S^۲+۱}{۲S^۲+۱}$

۴) $\frac{۱}{(S^۲+۱)(۲S^۲+۱)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم.



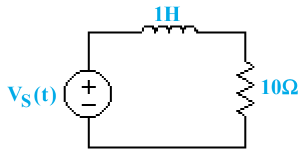
$$KVL(۱):-\frac{۱}{S^۲+۱}+۲SI+\frac{۱}{S}I=۰\Rightarrow I=\frac{\frac{۱}{S^۲+۱}}{۲S+\frac{۱}{S}}=\frac{S}{(S^۲+۱)(۲S^۲+۱)}$$

$$KVL(۲):\ V_o(S)=۲S\times۰+SI+\frac{۱}{S}I=\frac{S^۲+۱}{S}I$$

$$\Rightarrow\ V_o(S)=\frac{S^۲+۱}{S}\times\frac{S}{(S^۲+۱)(۲S^۲+۱)}=\frac{۱}{۲S^۲+۱}$$

مثال۱۰: **در مدار زیر $V_s(t)=V_m\cos(۱۰t+\theta)$ است. برای اینکه جریان i_L هیچ‌گونه پاسخ گذرایی نداشته باشد، باید θ چند درجه باشد؟**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)



۱) −۴۵

۲) −۳۰

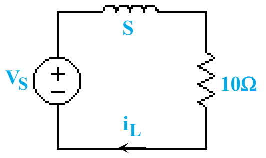
۳) +۳۰

۴) +۴۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا $V_S(t)$ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$V_S(t)=V_m\cos(۱۰t+\theta)=V_m\cos\theta\cos(۱۰t)-V_m\sin\theta\sin(۱۰t)$$

حال با تحلیل مدار در حوزه‌ی S، جریان i_L را محاسبه می‌کنیم. جزء گذرای جریان i_L به شکل نمایی بوده و در حوزه‌ی S، به شکل کسری $\frac{A}{S+B}$ ظاهر می‌شود (دقت کنید که مدار از مرتبه‌ی یک می‌باشد). همچنین جزء دائمی i_L به شکل سینوسی بوده و در فضای S، به شکل کسری $\frac{CS+D}{S^۲+۱۰۰}$ ظاهر خواهد شد. اکنون می‌توان نوشت:



$$V_S(S)=L\{V_m\cos\theta\cos(۱۰t)-V_m\sin\theta\sin(۱۰t)\}=\frac{V_m\cos\theta S-۱۰V_m\sin\theta}{S^۲+۱۰۰}$$

$$i_L(S)=\frac{۱}{S+۱۰}\times V_S(S)=\frac{۱}{S+۱۰}\times\frac{V_m\cos\theta S-۱۰V_m\sin\theta}{S^۲+۱۰۰}$$

مقدار گذرای جریان i_L در فضای S به‌راحتی از تجزیه‌ی کسری رابطه‌ی فوق به‌دست می‌آید:

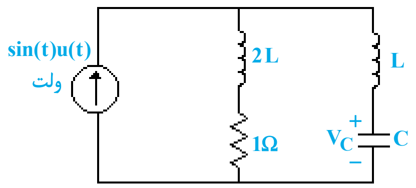
$$i_L(\text{گذرا})=\frac{۱}{S+۱۰}\times\frac{V_m\cos\theta\times(-۱۰)-۱۰V_m\sin\theta}{(-۱۰)^۲+۱۰۰}=-\frac{V_m}{۲۰}\frac{(\cos\theta+\sin\theta)}{S+۱۰}$$

حال برای آن‌که i_L پاسخ گذرا نداشته باشد، باید داشته باشیم:

$$-\frac{V_m}{۲۰}\times\frac{\cos\theta+\sin\theta}{S+۱۰}=۰\Rightarrow\theta=-۴۵^\circ$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۱: در مدار زیر، با فرض صفر بودن جریان اولیه هر دو سلف، مقدار ولتاژ اولیه خازن $V_C(0)$ برحسب ولت را به نحوی بیابید که جریان مقاومت برای $t \geq 0$ برابر صفر باشد. در این حالت مقدار سلف L برحسب هانری کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)

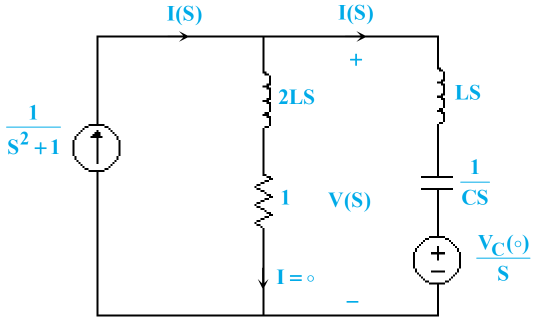


۱) $L=\frac{۱}{C}\ ,\ V_C(0)=-\frac{۱}{C}$

۲) $L=\frac{۲}{C}\ ,\ V_C(0)=0$

۳) $L=\frac{۱}{C}\ ,\ V_C(0)=\frac{۱}{C}$

۴) $L=\frac{۲}{C}\ ,\ V_C(0)=-\frac{۱}{C}$



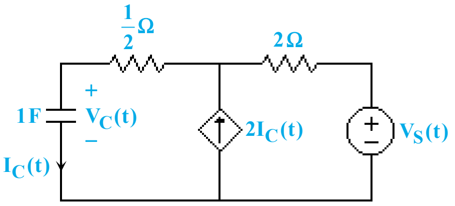
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» صفر بودن جریان مقاومت در شاخه وسط به معنای صفر بودن ولتاژ دو سر این شاخه در زمان $t \geq 0$ است. این حالت زمانی رخ می‌دهد که ولتاژ مدار LC سری در سمت راست برابر صفر و البته جریانش برابر $\sin(t)u(t)$ باشد تا جریانی به شاخه وسط مدار تزریق نشود. حال با نوشتن روابط مربوط به شاخه LC سمت راست در حوزه S، ولتاژ اولیه خازن و مقدار سلف را پیدا می‌کنیم:

$$I(S)=\frac{۱}{S^{۲}+۱}\quad ,\quad V(S)=(LS+\frac{۱}{CS})\times I(S)+\frac{V_C(0)}{S}=0$$

$$\Rightarrow (LS+\frac{۱}{CS})\times\frac{۱}{S^{۲}+۱}+\frac{V_C(0)}{S}=\frac{LCS^{۲}+۱+CV_C(0)(S^{۲}+۱)}{CS(S^{۲}+۱)}=\frac{[LC+CV_C(0)]S^{۲}+CV_C(0)+۱}{CS(S^{۲}+۱)}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}V_C(0)=-\frac{۱}{C}\\ LC=-CV_C(0)=۱\Rightarrow L=\frac{۱}{C}\end{cases}$$

مثال۱۲: در شکل زیر، پاسخ پله واحد $I_C(t)$، چگونه است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



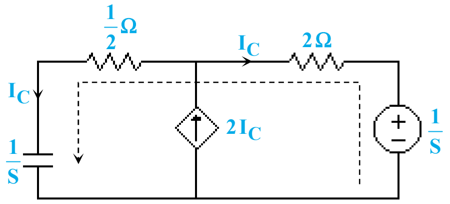
۱) $I_C(t)=-\frac{۲}{۳}e^{+\frac{۲}{۳}t}u(t)$

۲) $I_C(t)=-\frac{۳}{۲}e^{+\frac{۳}{۲}t}u(t)$

۳) $I_C(t)=\frac{۲}{۳}e^{-\frac{۲}{۳}t}u(t)$

۴) $I_C(t)=\frac{۳}{۲}e^{-\frac{۳}{۲}t}u(t)$

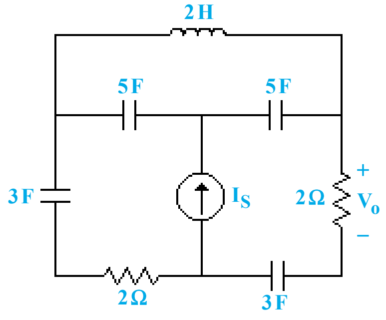
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه پاسخ پله، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و به جای منبع $V_S(t)$ لاپلاس تابع $u(t)$ را در مدار قرار می‌دهیم. حال با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:



$$-\frac{۱}{S}-۲I_C+\frac{۱}{۲}I_C+\frac{۱}{S}I_C=0\quad\Rightarrow\quad I_C(-۲+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S})=\frac{۱}{S}$$

$$\Rightarrow\quad I_C=\frac{۱}{۱-۱/۵S}=\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}S-۱}=\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}(S-\frac{۲}{۳})}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{S-\frac{۲}{۳}}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{I_C(t)=-\frac{۲}{۳}e^{\frac{۲}{۳}t}}$$

مثال۱۳: در شکل زیر، $V_o(t)$ کدام است؟ (تمامی مقادیر اولیه (ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف)، صفر می‌باشند. (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



$I_S(t)=u(t)$

۱) $u(t)$

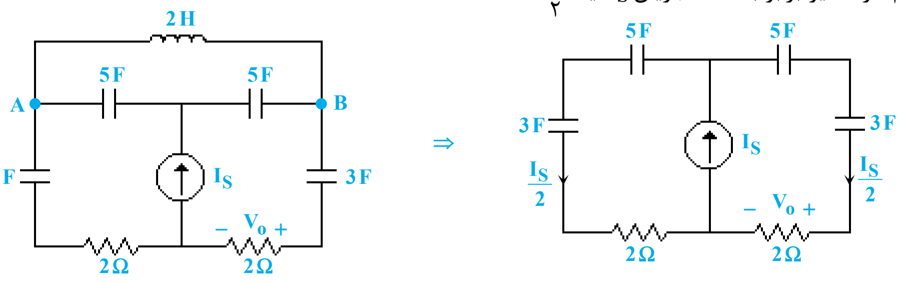
۲) $tu(t)$

۳) $\frac{۱}{۲}u(t)$

۴) $\frac{۱}{۲}tu(t)$

www.modaresanesharif.ac.ir

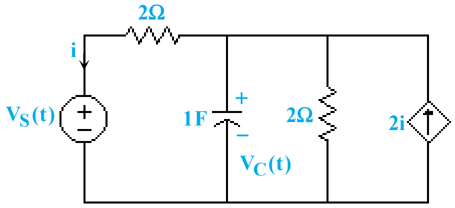
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به سری بودن خازن ۳ فاراد و مقاومت ۲ اهمی در سمت راست مدار، جای این دو المان را عوض می‌کنیم. حال مدار به صورت زیر خواهد بود. دقت کنید در این حالت به علت تقارن مدار ولتاژ نقاط A و B برابر است و از سلف ۲ هانری در بالای مدار جریان عبور نمی‌کند. بنابراین سلف ۲ هانری را حذف می‌کنیم و مدار را ساده می‌کنیم. در مدار ساده شده منبع جریان I_S دو مسیر مشابه را پیش روی خود دارد و به علت مشابه بودن مسیرها سهم هر مسیر برابر با نصف جریان I_S یا $\frac{u(t)}{۲}$ است.



$$V_o = ۲\times\frac{I_S}{۲} = I_S = \mathbf{u(t)}$$

مثال ۱۴: **در مدار روبه‌رو، پاسخ ضربه ولتاژ دو سر خازن $V_C(t)$ برابر کدام است؟**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



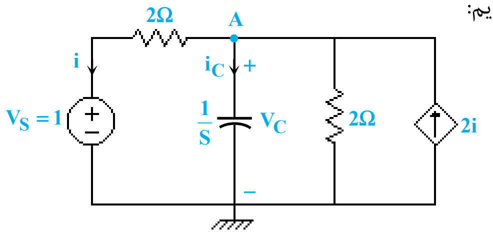
۱) $-۰/۵t\delta(t)$

۲) $-۰/۵u(t)$

۳) $-۰/۵u(t)-۰/۵t\delta(t)$

۴) $-۰/۵tu(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این تست مدار را در فضای S مدل کرده و V_C را به‌دست می‌آوریم:

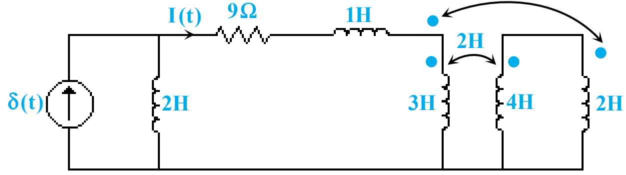


$$\text{KCL(A)}: i_C = ۲i - i - \frac{V_C}{۲} \xrightarrow{i=\frac{V_C-۱}{۲}\ ,\ i_C=SV_C}$$

$$SV_C = \frac{V_C-۱}{۲} - \frac{V_C}{۲} \Rightarrow V_C = -\frac{۱}{۲S} \Rightarrow V_S(t) = -\frac{u(t)}{۲}$$

مثال ۱۵: **پاسخ ضربه جریان $I(t)$ مدار شکل زیر چگونه است؟**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)



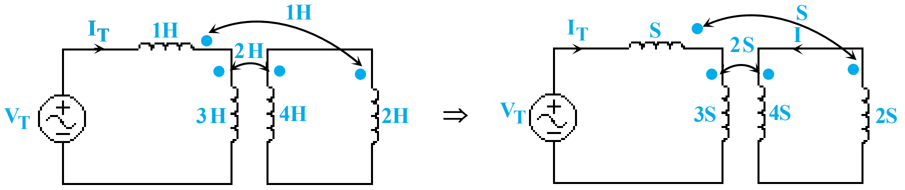
۱) $\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۲) $\frac{۴}{۹}\delta(t)+\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۳) $\frac{۲}{۹}\delta(t)-\frac{۴}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۴) $\frac{۲}{۹}\delta(t)+\frac{۴}{۹}e^{-۲t}u(t)$

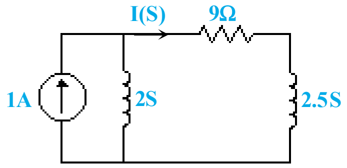
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا سلف معادل در سمت راست مدار را بدست می‌آوریم. برای این کار مدار را در فضای S مدل کرده و منبع تست V_T را به آن متصل می‌کنیم.



با نوشتن KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$\begin{cases} V_T = SI_T + ۳SI_T + ۲SI + SI & (۱) \\ ۲SI + ۴SI + ۲SI_T + SI_T = ۰ & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱),(۲)} V_T = ۲/۵I_TS \Rightarrow \frac{V_T}{I_T} = ۲/۵S \Rightarrow \mathbf{L_{eq} = ۲/۵H}$$

با جایگذاری L_{eq} در مدار داریم:



$$I(S) = ۱\times\frac{۲S}{۲S+۹+۲/۵S} \Rightarrow I(S) = \frac{۲S}{۴/۵S+۹} \Rightarrow I(S) = \frac{۴/۵S}{۴/۵S+۹}\times\frac{۱}{۲/۲۵}$$

$$\Rightarrow I(S) = \frac{۱}{۲/۲۵}[۱-\frac{۹}{۴/۵S+۹}] \Rightarrow I(S) = \frac{۱}{۲/۲۵}[۱-\frac{۲}{S+۲}]$$

$$I(t) = \frac{۱}{۲/۲۵}[\delta(t)-۲e^{-۲t}u(t)] \Rightarrow \mathbf{I(t) = \frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)}$$

مثال ۱۶: پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان $h(t)=\frac{۱}{۲}(u(t)-u(t-۲))$ است. پاسخ این مدار بـه ورودی $x(t)=\begin{cases}\sin t & ۰\le t<۲\pi \\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$، در فاصله $۲<t<۲\pi$ کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۲}\cos(t)$

۲) $\frac{۱}{۲}(۱-\cos(t))$

۳) $\frac{۱}{۲}(\cos(t-۲)-۱)$

۴) $\frac{۱}{۲}(\cos(t-۲)-\cos(t))$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از آنجایی که مدار LTI بوده و با توجه به شکل پاسخ ضربه، علّی نیز می‌باشد، پاسخ آن در فاصله‌ی زمانی $۲<t<۲\pi$ بـه ورودی $x(t)=\begin{cases}\sin(t) & ۰\le t<۲\pi \\ ۰ & t>۲\pi\end{cases}$ دقیقاً مشابه پاسخ مدار به ورودی $\hat{x}(t)=\sin t$ می‌باشد، چرا که در بازه‌ی زمانی مذکور، دو ورودی یکسان هستند. لذا برای حل این تست، به جای $x(t)$ داده شده، ورودی را به‌صورت $\sin t$ در نظر می‌گیریم تا روند حل آن ساده‌تر گردد. با محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس ورودی و پاسخ ضربه داریم:

$$\hat{x}(t)=\sin t \Rightarrow \hat{X}(S)=\frac{۱}{S^۲+۱}$$

$$h(t)=\frac{u(t)-u(t-۲)}{۲} \Rightarrow H(S)=\frac{۱}{۲S}(۱-e^{-۲S})$$

$$Y(S)=\hat{X}(S).H(S)=\frac{۱}{S^۲+۱}\times\frac{۱}{۲S}(۱-e^{-۲S})=\frac{۱-e^{-۲S}}{۲}[\frac{-S}{S^۲+۱}+\frac{۱}{S}]=\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{S}-\frac{S}{S^۲+۱}]-\frac{۱}{۲}e^{-۲S}[\frac{۱}{S}-\frac{S}{S^۲+۱}]$$

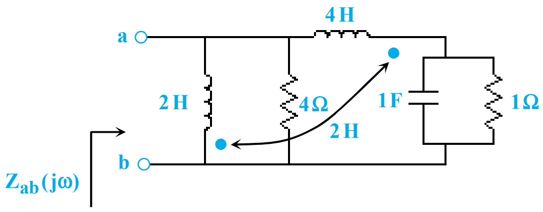
$$\Rightarrow y(t)=\frac{۱}{۲}[۱-\cos(t)]u(t)-\frac{۱}{۲}[۱-\cos(t-۲)]u(t-۲)\ \ ,\ \ ۰<t\le ۲\pi$$

در فاصله زمانی $۲<t<۲\pi$، توابع $u(t)$ و $u(t-۲)$ برابر یک می‌باشند؛ لذا داریم:

$$y(t)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos(t)-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos(t-۲)=\frac{۱}{۲}[\cos(t-۲)-\cos(t)]\ \ ,\ \ ۲<t\le ۲\pi$$

مثال ۱۷: در مدار زیر در چه فرکانس ω (برحسب رادیان بر ثانیه)، زاویه امپدانس $Z_{ab}(j\omega)$ برابر ۴۵ درجه می‌شود؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

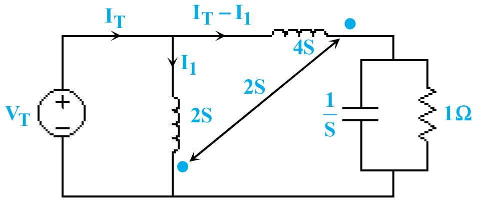


۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) ۴



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا امپدانس مدار را بدون مقاومت ۴Ω محاسبه می‌کنیم.

با اتصال V_T به مدار و نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_T=۲SI_۱+۲S(I_T-I_۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$(۴S+\frac{۱}{S+۱})(I_T-۱)-۲SI_۱+۲SI_۱+۲S(I_T-I_۱)=۰$$

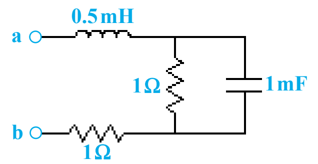
$$\Rightarrow\ \ V_T=۲SI_T\ \ \Rightarrow\ \ Z_{eq}=\frac{V_T}{I_T}=۲S\ \ \text{و}\ \ Z_T=۲S\,\|\,۴=\frac{۸S}{۲S+۴}=\frac{۴S}{S+۲}$$

با قرار دادن jω به جای S داریم:

$$Z_T(j\omega)=\frac{۴j\omega}{j\omega+۲}\Rightarrow\angle Z_T(j\omega)=\frac{\pi}{۲}-tg^{-۱}(\frac{\omega}{۲})=\frac{\pi}{۴}\ \ \Rightarrow\ \ \omega=۲(\frac{rad}{sec})$$

مثال ۱۸: فرکانس تشدید مدار زیر چند رادیان بر ثانیه است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



۱) ۵۰۰۰

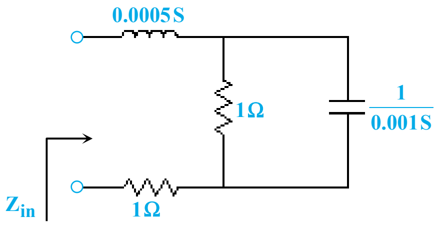
۲) ۱۰۰۰

۳) ۵۰۰

۴) ۱۰۰

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس Z_{in} را به دست می‌آوریم:



$$Z_{in}=۱+۰/۰۰۰۵S+\frac{۱\times\frac{۱۰۰۰}{S}}{۱+\frac{۱۰۰۰}{S}}=۱+۰/۰۰۰۵S+\frac{۱۰۰۰}{S+۱۰۰۰}$$

حال به جای S، عبارت $j\omega$ را قرار می‌دهیم و قسمت موهومی Z_{in} را برای محاسبه فرکانس رزونانس مساوی صفر قرار می‌دهیم:

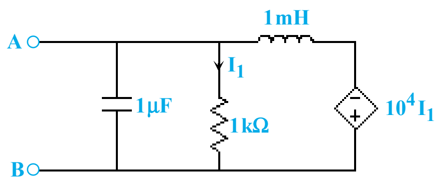
$$Z_{in}(j\omega)=۱+۰/۰۰۰۵j\omega+\frac{۱۰۰۰}{j\omega+۱۰۰۰}\quad\Rightarrow\quad Z_{in}(j\omega)=۱+۰/۰۰۰۵j\omega+\frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰^{۲}+\omega^{۲}}-j\frac{۱۰۰۰\omega}{۱۰۰۰^{۲}+\omega^{۲}}$$

$$\Rightarrow\ Z_{in}(j\omega)=۱+\frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰^{۲}+\omega^{۲}}+j(۰/۰۰۰۵\omega-\frac{۱۰۰۰\omega}{۱۰۰۰^{۲}+\omega^{۲}})\qquad \text{و}\qquad Im(Z_{in}(j\omega))=۰$$

$$\Rightarrow\ ۰/۰۰۰۵\omega=\frac{۱۰۰۰\omega}{۱۰۰۰^{۲}+\omega^{۲}}\quad\Rightarrow\quad ۰/۵\times۱۰۰۰\omega+۰/۰۰۰۵\omega^{۳}=۱۰۰۰\omega$$

$$\Rightarrow\ ۰/۰۰۰۵\omega^{۲}=۱۰۰۰-۰/۵\times۱۰۰۰\quad\Rightarrow\quad \omega^{۲}=\frac{۰/۵\times۱۰۰۰}{۰/۰۰۰۵}\quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_r=۱۰۰۰(\frac{rad}{sec})$$

مثال ۱۹: فرکانس تشدید $\omega_۰$ برای مدار شکل زیر چند رادیان بر ثانیه است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)



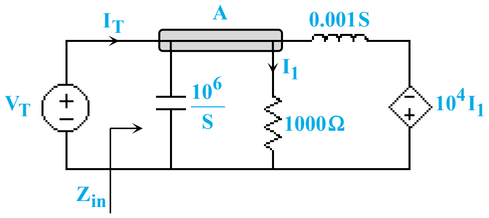
۱) ۳×۱۰^{۴}

۲) ۳×۱۰^{۵}

۳) $\sqrt{۱۱۰}\times۱۰^{۴}$

۴) $\sqrt{۱۱۰}\times۱۰^{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه فرکانس رزونانس، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و Y_{in} را بدست می‌آوریم:



$$KCL(A):\ I_T=\frac{V_T}{\frac{۱۰^{۶}}{S}}+\frac{V_T}{۱۰۰۰}+\frac{V_T+۱۰^{۴}I_۱}{۰/۰۰۱S}$$

$$I_۱=\frac{V_T}{۱۰۰۰}\quad\Rightarrow\quad I_T=\frac{SV_T}{۱۰^{۶}}+\frac{V_T}{۱۰۰۰}+\frac{V_T+۱۰^{۴}\times\frac{V_T}{۱۰۰۰}}{۰/۰۰۱S}$$

$$\Rightarrow\quad I_T=V_T[\frac{S}{۱۰^{۶}}+\frac{۱}{۱۰^{۳}+\frac{۱۱}{۰/۰۰۱S}}]\quad\Rightarrow\quad Y_{in}=\frac{I_T}{V_T}=\frac{S}{۱۰^{۶}}+\frac{۱}{۱۰^{۳}}+\frac{۱۱}{۰/۰۰۱S}$$

برای محاسبه فرکانس رزونانس، به جای S، عبارت $j\omega$ قرار داده و $Im(Y_{in})=۰$ قرار می‌دهیم:

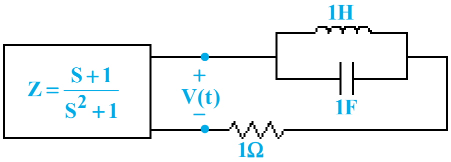
$$Y(j\omega)=\frac{j\omega}{۱۰^{۶}}+\frac{۱}{۱۰^{۳}}+\frac{۱۱}{۰/۰۰۱j\omega}\Rightarrow Im\,Y(j\omega)=۰\Rightarrow j[\frac{\omega}{۱۰^{۶}}-\frac{۱۱}{۰/۰۰۱\omega}]=۰\Rightarrow\frac{\omega^{۲}}{۱۰^{۶}}-\frac{۱۱}{۰/۰۰۱}=۰\Rightarrow\omega^{۲}=۱۰^{۶}\times۱۱۰۰۰\ \Rightarrow\omega=۱۰^{۴}\sqrt{۱۱۰}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل نهم

«فرکانس‌های طبیعی»

مثال۲۰: در مدار زیر، فرکانس‌های طبیعی ولتاژ $V(t)$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)



۱) $S=-۱\pm j\,,\,S=-۱$

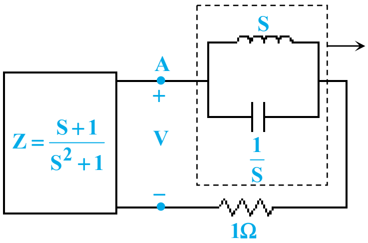
۲) $S=-۰/۵\pm j۰/۵\sqrt{۳}$

۳) $S=\pm j$

۴) $S=-۱\pm j$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

با مدل‌سازی مدار در حوزه فرکانس و نوشتن رابطه KCL در گره A مطابق شکل داریم:



$$Z_1(S)=\frac{S\times\frac{1}{S}}{S+\frac{1}{S}}=\frac{S}{S^2+1}$$

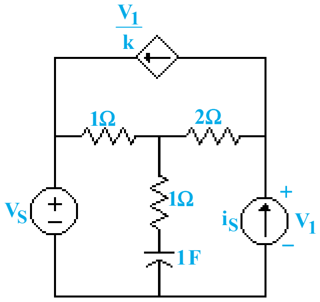
$$\text{KCL A}:\frac{V}{\underset{\underset{\frac{S+۱}{S^۲+۱}}{\downarrow}}{Z(S)}}=-\frac{V}{\underset{\underset{\frac{S}{S^۲+۱}}{\downarrow}}{Z_۱(S)+۱}}\Rightarrow\frac{S^۲+۱}{S+۱}V=-\frac{S^۲+۱}{S^۲+S+۱}V\Rightarrow\frac{(S^۲+۱)(S+۱+S^۲+S+۱)}{(S+۱)(S^۲+S+۱)}V=۰\Rightarrow(S^۲+۱)(S^۲+۲S+۲)V=۰\Rightarrow$$

$$(S^۲+۱)(S^۲+۲S+۲)=۰:V\ \text{معادله مشخصه}\Rightarrow\begin{cases}S_{۱,۲}=\pm j\\S_{۳,۴}=\frac{-۲\pm\sqrt{۴-۴\times۲}}{۲}=-۱\pm j\end{cases}$$

در نتیجه فرکانس‌های طبیعی V مجموعه $S=\{\pm j,-۱\pm j\}$ می‌باشد و لذا هیچ یک از گزینه‌ها صحیح نیست.

دقت کنید که پس از نوشتن معادله KCL مجاز به حذف عامل $(S^۲+۱)$ از دو طرف معادله نیستیم. در این صورت فرکانس‌های طبیعی متغیر V به شکل $S=\{-۱\pm j\}$ به دست خواهد آمد که همان پاسخ اعلام شده توسط سازمان سنجش (گزینه (۴)) است اما صحیح نمی‌باشد. برای اطمینان بیشتر از این مسئله می‌توان یک منبع ولتاژ تست را به‌صورت سری با خازن یا سلف مدار قرار داد و تابع انتقال مدار از ورودی منبع به خروجی V را محاسبه نمود. در این حالت خواهیم دید که فرکانس‌های موهومی $\pm j$ نیز در مخرج تابع انتقال پدیدار می‌شود.

مثال۲۱: اگر فرکانس طبیعی مدار زیر برابر $-\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار ثابت k چقدر است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



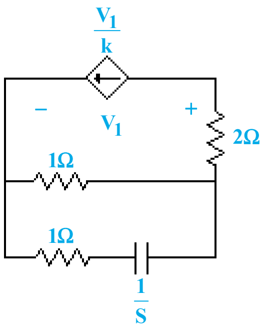
۱) ۴−

۲) ۲−

۳) ۲

۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا با غیرفعال کردن منابع ورودی مستقل، فرکانس طبیعی مدار را محاسبه نموده و سپس آن را برابر $-\frac{۱}{۳}$ قرار می‌دهیم. حال با توجه به شکل زیر داریم:



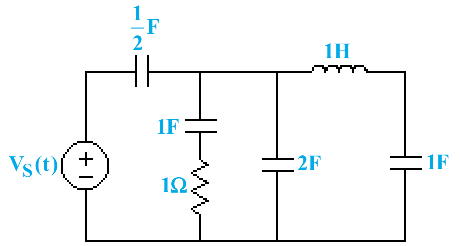
$$V_۱=-\frac{V_۱}{k}\times\underbrace{(۲+۱\,||\,(۱+\frac{۱}{S}))}_{\frac{۵S+۳}{۲S+۱}}\Rightarrow V_۱(۱+\frac{۵S+۳}{(۲S+۱)k})=۰\Rightarrow[(۲k+۵)S+k+۳]V_۱=۰$$

بنابراین معادله مشخصه سیستم به شکل $(۲k+۵)S+k+۳=۰$ بوده و فرکانس طبیعی آن برابر است با:

$$S=-\frac{k+۳}{۲k+۵}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow k=-۴$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۲: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر کدام است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)



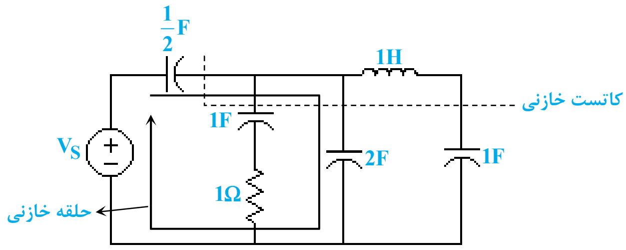
۱) ۲

۲) ۳

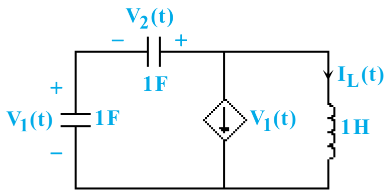
۳) ۴

۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با شمارش تعداد خازن‌ها و سلف‌های مدار مشخص می‌شود که مدار ۵ عنصر ذخیره‌کننده انرژی دارد. به دلیل وجود یک حلقه خازنی، تعداد فرکانس‌های و مدار برابر ۴ = ۱ − ۵ خواهد بود و به دلیل وجود یک کاتست خازنی، مدار یک فرکانس طبیعی صفر دارد؛ لذا تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار برابر ۳ = ۱ − ۴ می‌باشد.



مثال ۲۳: معادله‌ی مفسر مدار روبرو، چگونه است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



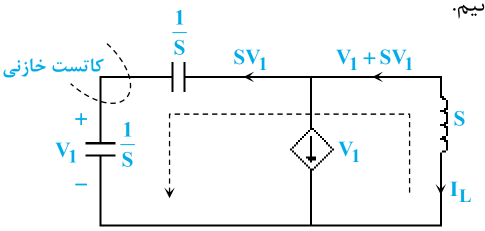
۱) $(S^{۲}+۲)=۰$

۲) $S(S^{۲}+۲)=۰$

۳) $(S^{۲}+S+۲)=۰$

۴) $S(S^{۲}+S+۲)=۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و در حلقه مدار KVL می‌زنیم.

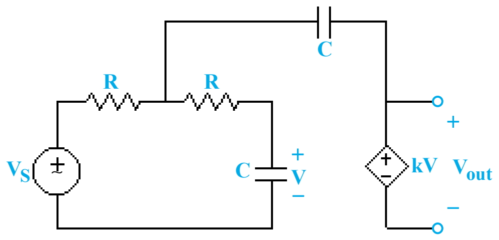


$$S(V_{۱}+SV_{۱})+SV_{۱}\times\frac{۱}{S}+V_{۱}=۰ \Rightarrow V_{۱}(S+S^{۲}+۱+۱)=۰$$

$$\Rightarrow V_{۱}(S^{۲}+S+۲)=۰$$

بنابراین معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر به صورت $(S^{۲}+S+۲=۰)$ می‌باشد. با توجه به وجود یک کاتست خازنی، مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر نیز می‌باشد. بنابراین معادله مشخصه اصلی مدار به صورت روبرو است: $S(S^{۲}+S+۲)=۰$

مثال ۲۴: به ازای کدام مقدار k، مدار زیر نوسان دائم خواهد داشت؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



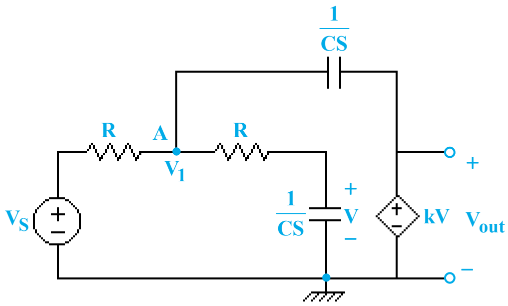
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به خواسته سؤال، مسلم است که مدار روبه‌رو مدنظر طراح تست بوده است، چرا که در غیر این صورت، جریان خازن بالایی صفر بوده و مدار امکان نوسان نخواهد داشت. حال معادله مشخصه مدار را با فرض $V_S=۰$ محاسبه می‌کنیم:



$$V=\frac{\frac{۱}{CS}}{\frac{۱}{CS}+R}\times V_{۱}=\frac{۱}{RCS+۱}V_{۱} \qquad (۱)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

$$KCL(A):\frac{V_{۱}}{R}+\frac{V_{۱}}{R+\frac{۱}{CS}}+\frac{V_{۱}-kV}{\frac{۱}{CS}}=۰\xrightarrow{(۱)}V_{۱}(\frac{۱}{R}+\frac{CS}{RCS+۱}+CS-\frac{KCS}{RCS+۱})=۰\xrightarrow{\times R(RCS+۱)}$$

$$\Rightarrow V_{۱}(RCS+۱+RCS+R^{۲}C^{۲}S^{۲}+RCS-kRCS)=۰$$

$$\Rightarrow V_{۱}(R^{۲}C^{۲}S^{۲}+(۳-k)RCS+۱)=۰\Rightarrow S^{۲}+\frac{۳-k}{RC}S+\frac{۱}{R^{۲}C^{۲}}=۰$$:معادله مشخصه

مشخص است که به ازای $k = ۳$، ضریب S در معادله مشخصه صفر شده و ریشه‌های آن موهومی محض خواهند شد. در این حالت مدار نوسان دائم خواهد داشت.

مثال۲۵: مدار شکل مقابل به ازای چه مقداری از k نوسان می‌کند؟ فرکانس این نوسان چند رادیان بر ثانیه است؟

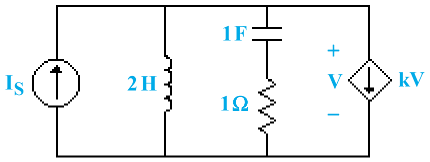
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱- و ۱

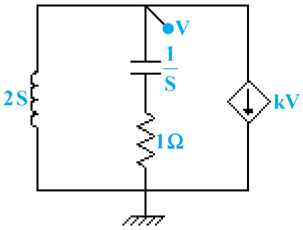
۲) ۱- و ۴

۳) $-\frac{۱}{۲}$ و ۱

۴) ۱ و ۴



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم. در این حالت منبع I_S را صفر فرض می‌کنیم.



$$\frac{V}{۲S}+\frac{V}{\frac{۱}{S}+۱}+kV=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲S}+\frac{۱}{\frac{۱}{S}}+k=۰\quad\Rightarrow\frac{۱}{۲S}+\frac{S}{S+۱}+k=۰$$

$$S+۱+۲S^{۲}+k(۲S)(S+۱)=۰$$

$$S^{۲}(۲+۲k)+S(۲k+۱)+۱=۰$$

حال برای حالت نوسانی، باید ضریب S صفر شود.

$$۲k+۱=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow S^{۲}(۲+۲\times(-\frac{۱}{۲}))+۱=۰\Rightarrow S^{۲}+۱=۰\Rightarrow(j\omega)^{۲}+۱=۰\Rightarrow-\omega^{۲}+۱=۰\Rightarrow\omega=۱\frac{rad}{sec}$$

مثال۲۶: قطب‌ها و صفرهای امپدانس ورودی مدار شکل زیر در کجا هستند؟

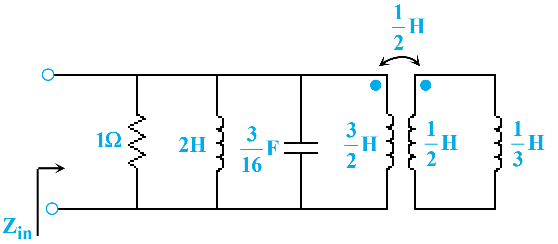
(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) قطب مکرر در $-\frac{۸}{۳}$ و صفر مکرر در بینهایت

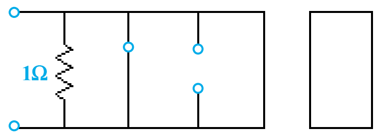
۲) قطب مکرر در $-\frac{۳}{۸}$ و صفر مکرر در بینهایت

۳) قطب مکرر در $-\frac{۳}{۸}$ و یک صفر در بینهایت و یک صفر در $S = ۰$

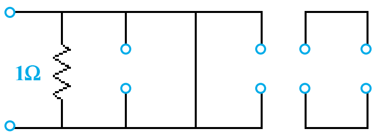
۴) قطب مکرر در $-\frac{۸}{۳}$ و یک صفر در بینهایت و یک صفر در $S = ۰$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع امپدانس مدار، یک صفر در فرکانس بینهایت به علت وجود خازن و یک صفر در فرکانس صفر به علت وجود سلف ۲H دارد:

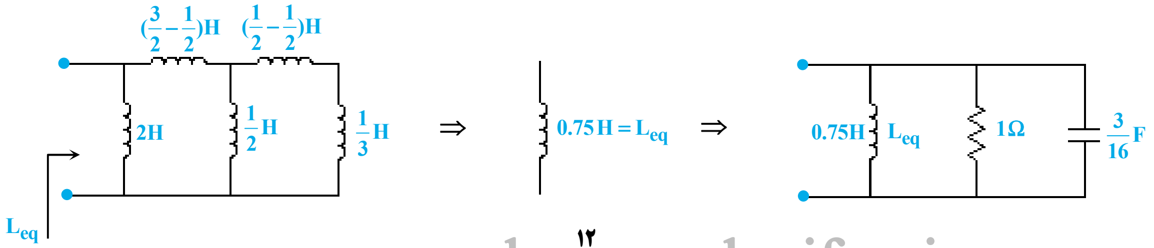


$S = ۰$



$S = \infty$

از طرفی برای محاسبه‌ی قطب‌های آن می‌توان با معادل‌سازی سلف‌های مدار، آن را به شکل یک مدار RLC موازی درآورده و از روابط آماده قطب‌ها را محاسبه کرد. برای این کار سلف‌های تزویج‌شده را با مدل T آنها جایگزین می‌کنیم. قطب‌های آن با محاسبه معادله مشخصه مدار به دست می‌آید:



www.modaresanesharif.ac.ir

$$S^{۲}+\frac{۱}{RC}S+\frac{۱}{L_{eq}C}=۰ \Rightarrow S^{۲}+\frac{۱۶}{۳}S+\frac{۶۴}{۹}=۰ \Rightarrow (S+\frac{۸}{۳})^{۲}=۰ \Rightarrow S_{۱}=-\frac{۸}{۳}\ ,\ S_{۲}=-\frac{۸}{۳}$$

و صفرها $=(S=۰\ ,\ S=\infty)$

$\Rightarrow$ قطب‌ها $=(-\frac{۸}{۳},-\frac{۸}{۳})$

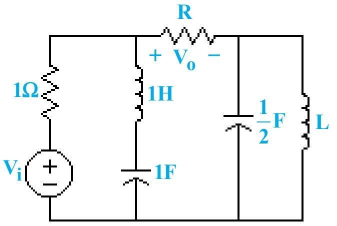
مثال ۲۷: برای مدار زیر تابع شبکه‌ی روبه‌رو، داده شده است.

$$H(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}=\frac{S^{۴}+aS^{۳}+۵S^{۲}+bS+c}{۳S^{۴}+۵S^{۳}+۱۹S^{۲}+۸S+۱۲}$$

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)

مقادیر مجهول a، b و c کدام است؟

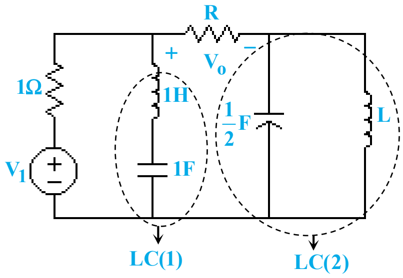
۱) $(a,b,c)=(۱,۱,۳)$
۲) $(a,b,c)=(۰,۰,۴)$
۳) $(a,b,c)=(۱,۰,۳)$
۴) $(a,b,c)=(۰,۱,۴)$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل مدار مشخص است که تابع انتقال H(S)، تحت تأثیر مدارهای LC موازی و سری موجود، باید ۴ صفر داشته باشد. حال مقدار این صفرها را محاسبه می‌کنیم. برای این کار معادله مشخصه‌های این دو مدار LC را محاسبه و ضرب می‌کنیم:

$$LC(۱)\ \text{مدار} \rightarrow S^{۲}+۱=۰ \quad , \quad LC(۲)\ \text{مدار} \rightarrow S^{۲}+\frac{۲}{L}=۰$$

بنابراین صورت تابع انتقال H(S) که دربرگیرنده صفرهای H(S) نیز می‌باشد، برابر خواهد بود با:



$$(S^{۲}+۱)(S^{۲}+\frac{۲}{L})=S^{۴}+(\frac{۲}{L}+۱)S^{۲}+\frac{۲}{L}$$

$$S^{۴}+aS^{۳}+۵S^{۲}+bS+c=S^{۴}+(\frac{۲}{L}+۱)S^{۲}+\frac{۲}{L}$$

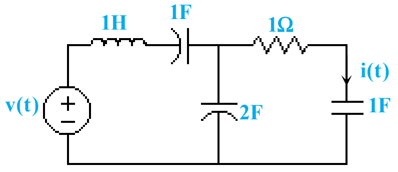
حال داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ b=۰ \\ \frac{۲}{L}+۱=۵ \Rightarrow L=\frac{۱}{۲}H \Rightarrow c=\frac{۲}{L}=۴ \end{cases}$$

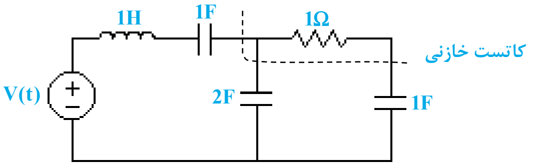
مثال ۲۸: در تابع شبکه $H(s)=\frac{I(s)}{V(s)}$ **تعداد قطب‌های شبکه برابر کدام است؟**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)

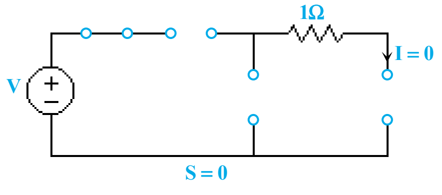
۱) سه قطب که هیچ‌کدام در فرکانس صفر نمی‌باشد.
۲) سه قطب که حداقل یکی در فرکانس صفر است.
۳) چهار قطب که هیچ‌کدام در فرکانس صفر نمی‌باشد.
۴) چهار قطب که حداقل یکی در فرکانس صفر است.



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مدار مورد سؤال سه خازن و یک سلف وجود دارد و این یعنی مدار ۴ = ۱ + ۳ فرکانس طبیعی دارد. از این چهار فرکانس طبیعی یکی به علت وجود یک کاتست خازنی برابر صفر است:



می‌دانیم که هر تابع انتقال یک مدار یا شبکه، حداکثر به تعداد فرکانس‌های طبیعی آن مدار یا شبکه دارای قطب است که این قطب‌ها همان فرکانس‌های طبیعی مدار یا زیرمجموعه‌ای از مجموعه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند. از طرفی دقت کنید که در فرکانس $S=۰$، با توجه به شکل مقابل مقدار I برابر صفر است:

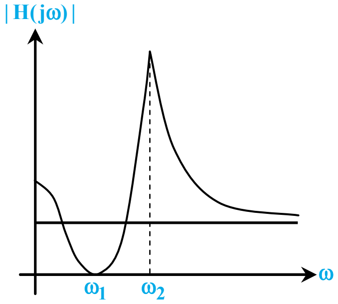


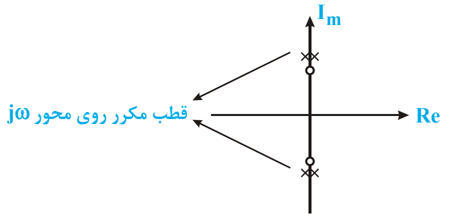
این یعنی تابع انتقال $H(S)=\frac{I(S)}{V(S)}$ دارای حداقل یک صفر در $S=۰$ است. مسلماً همزمان H(S) نمی‌تواند دارای قطبی در $S=۰$ باشد. بنابراین فرکانس طبیعی $S=۰$ نمی‌تواند در مجموعه قطب‌های H(S) باشد. در نتیجه می‌توان گفت که H(S) دارای ۳ قطب بوده که هیچ‌یک صفر نیست.

www.modaresanesharif.ac.ir

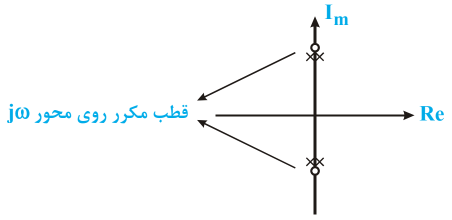
مثال۲۹: منحنی اندازه از پاسخ فرکانسی یک مدار به صورت زیر داده شده است. کدام آرایش صفر و قطب می‌تواند برای این مدار صحیح باشد؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)

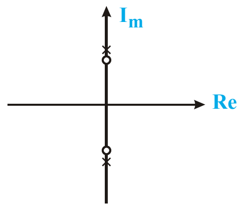




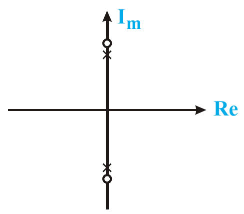
(۱)



(۲)



(۳)

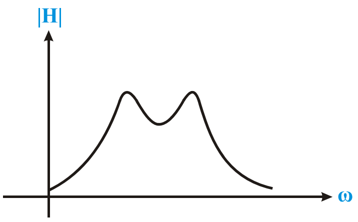


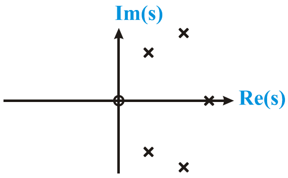
(۴)

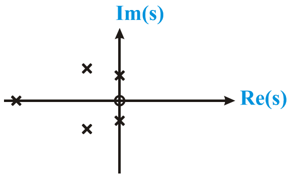
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این‌که اندازه $H(j\omega)$ در $\omega=\infty$ محدود و مخالف صفر است، تعداد قطب‌ها و صفرهای H یکسان می‌باشد؛ بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) پاسخ تست نخواهند بود. از طرفی با توجه به منحنی $|H(j\omega)|$ مشخص است که $H(j\omega)$ در $\omega=\omega_1$ یک صفر و در $\omega=\omega_2$ یک قطب دارد. با توجه به این‌که ω_2 از ω_1 بزرگتر است، قطب‌های H باید نسبت به صفرها فاصله‌ی بیشتری از مبدأ صفحه مختلط داشته باشند؛ لذا پاسخ تست گزینه (۳) خواهد بود.

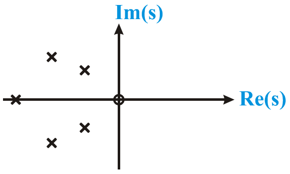
مثال۳۰: منحنی اندازه تابع یک شبکه به شکل زیر است. دیاگرام صفر و قطب مربوط به این تابع، کدام می‌تواند باشد؟

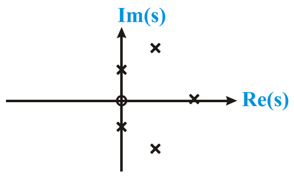
(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)



۱)


۲)


۳)


۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۱ و ۳» با توجه به مشخصات منحنی اندازه تابع شبکه می‌توان موقعیت و تعداد صفرها و قطب‌های $H(S)$ را به شکل زیر تشریح کرد:

۱ـ $|H(j\omega)|$ در فرکانس‌های کوچک به صفر میل می‌کند. لذا $H(S)$ صفری در $S=0$ دارد.

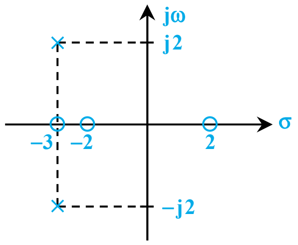
۲ـ $|H(j\omega)|$ در بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند؛ لذا تعداد قطب‌های $H(S)$ بیشتر از تعداد صفرهای آن است.

۳ـ $|H(j\omega)|$ دارای دو ماکزیمم نسبی محدود است، لذا $H(S)$ می‌تواند دارای ۲ جفت قطب مختلط مزدوج باشد. دقت کنید که هیچ‌یک از این دو جفت قطب نمی‌توانند روی محور موهومی باشند چرا که چنین قطب‌هایی ماکزیمم‌های بی‌کران ایجاد می‌کنند، در حالی‌که ماکزیمم‌های $|H(j\omega)|$ کراندار هستند.

مطابق با توضیحات فوق گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند زیرا دارای قطب‌های موهومی هستند. دو گزینه دیگر، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳)، تمام شروط فوق را ارضا کرده و هر دو می‌توانند دیاگرام قطب و صفر $H(S)$ باشند، هر چند یکی پایدار و دیگری ناپایدار است. قابل ذکر است که قرینه‌سازی قطب و صفرهای یک تابع انتقال نسبت به محور موهومی در فضای مختلط، تغییری در منحنی $|H(j\omega)|$ به‌وجود نمی‌آورد و تنها منحنی $\measuredangle H(j\omega)$ را تغییر می‌دهد. از این رو عموماً منحنی $|H(j\omega)|$ به تنهایی اطلاعاتی در مورد پایداری $H(S)$ دربرندارد.

مثال۳۱: **نمودار صفر و قطب شکل مقابل به تابع شبکه $H(S)$ مربوط است. اگر $H(۳)=۳$ باشد، مقدار $H(۰)$ و $H(\infty)$ به ترتیب چقدر است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)



۱) $۰\ ,\ -\frac{۴۸}{۱۳}$

۲) $۰\ ,\ -\frac{۳۶}{۱۳}$

۳) $\infty\ ,\ -\frac{۴۸}{۱۳}$

۴) $\infty\ ,\ -\frac{۳۶}{۱۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نمودار صفر و قطب داریم:

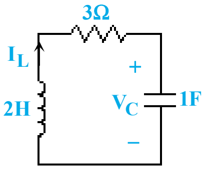
$$H(S)=\frac{k(S+۲)(S+۳)(S-۲)}{(S-(-۳-j۲))(S-(-۳+j۲))} \Rightarrow H(S)=\frac{k(S+۲)(S+۳)(S-۲)}{S^۲+۶S+۱۳}$$

$$H(۳)=۳ \Rightarrow \frac{k(۳+۲)(۳+۳)(۳-۲)}{۳^۲+۶\times۳+۱۳}=۳ \Rightarrow \frac{k\times۳۰}{۴۰}=۳ \Rightarrow k=۴ \Rightarrow H(S)=\frac{۴(S+۲)(S+۳)(S-۲)}{S^۲+۶S+۱۳}$$

$$H(۰)=\frac{۴\times(۰+۲)(۰+۳)(۰-۲)}{۰^۲+۶\times۰+۱۳}=\frac{۴\times۲\times۳\times(-۲)}{۱۳}=\frac{-۴۸}{۱۳} \quad , \quad H(\infty)=\lim_{S\to\infty} H(S)=\infty$$

مثال۳۲: **در مدار زیر برای اینکه در پاسخ ورودی صفر $V_C(t)$، تنها یک فرکانس طبیعی ظاهر شود، $I_L(۰)$ چند آمپر باشد؟ $V_C(۰)$، ۱۰ ولت است.**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)



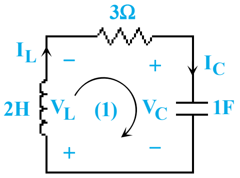
۱) ۱۵−

۲) ۵−

۳) ۰

۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این تست را می‌توان با استفاده از معادلات حالت و یا مستقیماً با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کرد. ما از روش اول استفاده می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$I_C=I_L=۱\times\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=I_L \qquad (۱)$$

$$\text{KVL (۱)}: V_L+۳I_L+V_C=۰ \Rightarrow V_L=-۳I_L-V_C=\frac{۲dI_L}{dt} \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=-\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۳}{۲}I_L \qquad (۲)$$

حال طبق روابط (۱) و (۲)، اگر متغیرهای حالت به شکل $\begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix}$ انتخاب شوند، داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix}$$

پاسخ ورودی صفر مدار را می‌توان از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$\begin{bmatrix} V_C(S) \\ I_L(S) \end{bmatrix}=(SI-A)^{-۱}\begin{bmatrix} V_C(۰) \\ I_L(۰) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & S+\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱۰ \\ I_L(۰) \end{bmatrix}=\frac{۱}{S(S+\frac{۳}{۲})+\frac{۱}{۲}}\begin{bmatrix} S+\frac{۳}{۲} & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۰ \\ I_L(۰) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_C(S)=\frac{۱۰(S+\frac{۳}{۲})+I_L(۰)}{S^۲+\frac{۳}{۲}S+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱۰(S+\frac{۳}{۲}+\frac{I_L(۰)}{۱۰})}{(S+۱)(S+\frac{۱}{۲})}$$

مطابق رابطه‌ی فوق برای آن‌که تنها یک فرکانس طبیعی در پاسخ V_C ظاهر شود، باید صورت کسر به‌دست آمده دارای ریشه‌ی ۱− یا $-\frac{۱}{۲}$ باشد:

$$\begin{cases} \frac{۳}{۲}+\frac{I_L(۰)}{۱۰}=۱ \Rightarrow I_L(۰)=-۵\text{A} \\ \frac{۳}{۲}+\frac{I_L(۰)}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow I_L(۰)=-۱۰\text{A} \end{cases}$$

مقادیر به‌دست آمده برای $I_L(۰)$ هر دو قابل قبول هستند، اما تنها مقدار اول یعنی ۵− آمپر در گزینه‌ها آمده و همان گزینه پاسخ تست می‌باشد.

مثال ۳۳: به ازای چه مقادیری از پارامتر حقیقی a، عبارت $Z(S)=\frac{S+a}{S(S+۱)}$ می‌تواند امپدانس ورودی یک مدار شامل فقط مقاومت و سلف و خازن مثبت باشد؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)

۱) $۰\le a\le ۲$

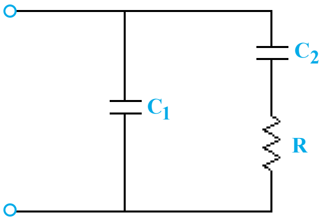
۲) $-\frac{۱}{۲}\le a\le ۱$

۳) $a>۰$

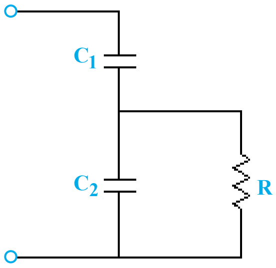
۴) $a\le ۱$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

روش اول: با توجه به این که تابع $Z(S)$ دارای ۲ قطب و ۱ صفر است، مدار RLC از مرتبه ۲ بوده و دارای۲ عنصر ذخیره‌کننده انرژی است. از طرف دیگر امپدانس معادل مدار در فرکانس صفر برابر بی‌نهایت و در فرکانس بی‌نهایت برابر صفر است. با توجه به این نکته، مدار RLC به طور قطع شامل دو خازن و یک مقاومت است که در یکی از دو ساختار زیر به هم متصل شده‌اند:



ساختار ۲



ساختار ۱

در ساختار ۱ داریم:

$$Z_۱(S)=\frac{۱}{C_۱S}+(R\,||\,\frac{۱}{C_۲S})=\frac{۱}{C_۱S}+\frac{R}{RC_۲S+۱}$$

اگر این ساختار همان ساختار مورد نظر باشد، با توجه به مقدار $Z(S)$ باید داشته باشیم:

$$Z(S)=\frac{S+a}{S(S+۱)}=\frac{a}{S}+\frac{۱-a}{S+۱}$$

$$Z_۱(S)=Z(S)\Rightarrow\frac{۱}{C_۱S}+\frac{R}{RC_۲S+۱}=\frac{a}{S}+\frac{۱-a}{S+۱}\Rightarrow\begin{cases}R=۱-a\\ C_۱=\frac{۱}{a}\\ C_۲=\frac{۱}{۱-a}\end{cases},\quad R,C_۱,C_۲>۰\Rightarrow ۰<a<۱$$

و حال برای ساختار ۲ داریم:

$$Z_۲(S)=\frac{۱}{C_۱S}\,||\,(R+\frac{۱}{C_۲S})=\frac{۱}{C_۱S}\,||\,\frac{RC_۲S+۱}{C_۲S}=\frac{\frac{۱}{C_۱S}\times\frac{RC_۲S+۱}{C_۲S}}{\frac{۱}{C_۱S}+\frac{RC_۲S+۱}{C_۲S}}=\frac{RC_۲S+۱}{RC_۱C_۲S^۲+(C_۱+C_۲)S}=\frac{\frac{۱}{C_۱}S+\frac{۱}{RC_۱C_۲}}{S(S+\frac{C_۱+C_۲}{RC_۱C_۲})}$$

اگر ساختار ۲ همان ساختار مورد نظر باشد، باید داشته باشیم:

$$Z_۲(S)=Z(S)\Rightarrow\frac{\frac{۱}{C_۱}S+\frac{۱}{RC_۱C_۲}}{S(S+\frac{C_۱+C_۲}{RC_۱C_۲})}=\frac{S+a}{S(S+۱)}\Rightarrow\begin{cases}R=\frac{۱}{۱-a}\\ C_۱=۱\\ C_۲=\frac{۱-a}{a}\end{cases},\quad R,C_۱,C_۲>۰\Rightarrow ۰<a<۱$$

بنابراین a باید حتماً در بازه $[۰,۱]$ باشد.

روش دوم: با توجه به این که عناصر مدار RLC مورد نظر مثبت هستند، لذا مدار RLC پایدار و پسیو است. می‌دانیم صفرهای $Z(S)$ فرکانس‌های طبیعی مدار هستند زمانی که ورودی مدار اتصال کوتاه شود؛ بنابراین با توجه به پایداری مدار اتصال کوتاه که معادل با پایداری فرکانس‌های طبیعی این مدار نیز هست، باید صفرهای تابع $Z(S)$ پایدار باشند. بنابراین باید داشته باشیم: $S+a$ پایدار $\Rightarrow a>۰$

از طرفی از آنجایی که مدار پسیو است، با فرض تحریک سینوسی مدار توسط منبع جریان دلخواه I_S، باید مدار توان اکتیو مصرف کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$Z(S)=\frac{S+a}{S(S+۱)}\Rightarrow Z(j\omega)=\frac{j\omega+a}{j\omega(j\omega+۱)}=\frac{۱-j\frac{a}{\omega}}{۱+j\omega}=\frac{۱-a-j(\frac{a}{\omega}+\omega)}{۱+\omega^۲}\Rightarrow \mathrm{Re}\{Z(j\omega)\}=\frac{۱-a}{۱+\omega^۲}$$

$$P=\frac{۱}{۲}\mathrm{Re}\{Z(j\omega)\}|I_S|^۲=\frac{۱}{۲}|I_S|^۲\frac{۱-a}{۱+\omega^۲}>۰\ \Rightarrow a<۱$$

با توجه به مباحث مطرح شده، a باید مقداری بین صفر و یک باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل دهم

«قضایای شبکه»

مثال ۳۴: مدار یک‌قطبی N خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و برای سه مقدار R_L ولتاژ V_{ab} اندازه‌گیری شده است. امپدانس دیده شده در سرهای a و b چند اهم است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)

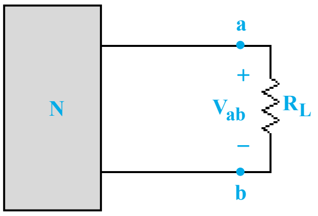
۱) ۲

۲) ۱۲

۳) $۱۲+j۲$

۴) $۲+j۱۲$

R_L اهم	∞	۳	۱۴
$V_{ab}(rms)$ ولت	۱۳	۳	۹/۱



☑**پاسخ:** گزینه «۴» اگر پارامترهای مدار معادل تونن یک‌قطبی N را V_{th} و $Z_{th}=a+bj$ در نظر بگیریم، با توجه به سه آزمایش انجام گرفته داریم:

$$R_L=\infty\Rightarrow V_{ab}=|V_{th}|=۱۳$$

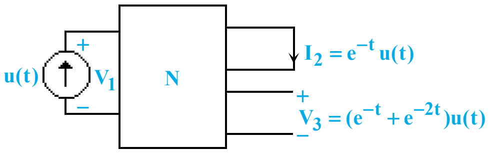
$$R_L=۳\Rightarrow V_{ab}=\left|\frac{۳}{۳+Z_{th}}\times V_{th}\right|=\left|\frac{۳۹}{۳+Z_{th}}\right|=۳\Rightarrow|۳+Z_{th}|=|۳+a+bj|=\sqrt{(a+۳)^۲+b^۲}=۱۳$$

$$R_L=۱۴\Rightarrow V_{ab}=\left|\frac{۱۴}{۱۴+Z_{th}}\times V_{th}\right|=\left|\frac{۱۸۲}{۱۴+Z_{th}}\right|=۹/۱\Rightarrow|۱۴+Z_{th}|=|۱۴+a+bj|=\sqrt{(a+۱۴)^۲+b^۲}=۲۰$$

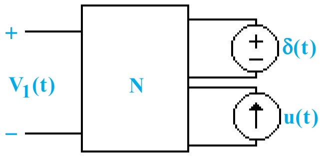
حال با جمع‌آوری روابط بدست آمده، یک دستگاه دو معادله دو مجهول داریم که از حل آن مقادیر a و b و به دنبال آن Z_{th} بدست می‌آید:

$$\begin{cases}(a+۳)^۲+b^۲=۱۶۹\\(a+۱۴)^۲+b^۲=۴۰۰\end{cases}\Rightarrow a=۲\,,\,b=۱۲\;\Rightarrow Z_{th}=(۲+۱۲j)\Omega$$

مثال ۳۵: نتایج یک آزمایش بر روی سه قطبی N در شکل (الف) داده شده است (پاسخ‌های حالت صفر). در آزمایش شکل (ب) ولتاژ $V_۱(t)$ برای $t>۰$ کدام است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)



(الف)



(ب)

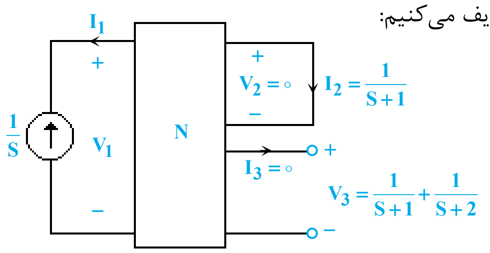
۱) $e^{-۲t}-\delta(t)$

۲) $e^{-۲t}+\delta(t)$

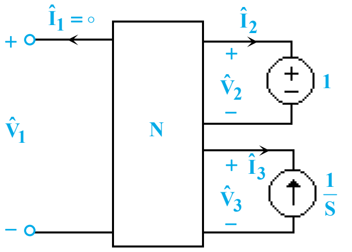
۳) $e^{-t}-e^{-۲t}+\delta(t)$

۴) $e^{-t}-\delta(t)$

☑**پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این تست از قضیه‌ی تلگان استفاده می‌کنیم. نتایج آزمایش‌ها را به حوزه‌ی لاپلاس برده و ولتاژ و جریان‌های قراردادی را مطابق شکل تعریف می‌کنیم:



(الف)



(ب)

مطابق قضیه‌ی تلگان داریم:

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲\hat{I}_۲+V_۳\hat{I}_۳=\hat{V}_۱I_۱+\hat{V}_۲I_۲+\hat{V}_۳I_۳$$

حال با جایگذاری متغیرها در رابطه‌ی فوق، $\hat{V}_۱$ را محاسبه می‌کنیم:

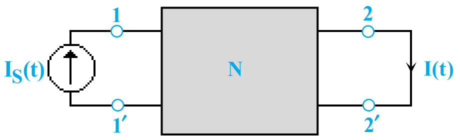
$$V_۱\times۰+۰\times\hat{I}_۲+(\frac{۱}{S+۱}+\frac{۱}{S+۲})\times(-\frac{۱}{S})=\hat{V}_۱\times(-\frac{۱}{S})+۱\times\frac{۱}{S+۱}+\hat{V}_۳\times۰\xrightarrow{\times S}۰-\frac{۱}{S+۱}-\frac{۱}{S+۲}=-\hat{V}_۱+\frac{S}{S+۱}+۰$$

$$\Rightarrow\hat{V}_۱=۱+\frac{۱}{S+۲}\Rightarrow\hat{V}_۱(t)=L^{-۱}\{۱+\frac{۱}{S+۲}\}=\delta(t)+e^{-۲t}u(t)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۶: شبکه N متشکل از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان و یک سلف 1H و یک خازن 1F می‌باشد. آزمایش زیر صورت گرفته و جریان I(t) (در حالت دائمی) اندازه‌گیری شده است. (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



$$I(t) = ۲\sin(t + \frac{\pi}{۴})$$

$$I_S(t) = ۵\cos(t - \frac{\pi}{۲})$$

چنانچه جای سلف و خازن را عوض کنیم، ولتاژ V(t) در مدار زیر چقدر خواهد شد؟

$$V_S(t) = ۵\cos(t + \frac{\pi}{۸})$$

۱) $۲\cos(t - \frac{\pi}{۸})$
۲) $۲\cos(t - \frac{۳\pi}{۸})$
۳) $۲\cos(t + \frac{\pi}{۸})$
۴) $۲\cos(t + \frac{۳\pi}{۸})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به قضیه هم‌پاسخی و براساس بیان سوم این قضیه، تابع $\frac{V_{in}}{V_o}$ را محاسبه می‌کنیم.

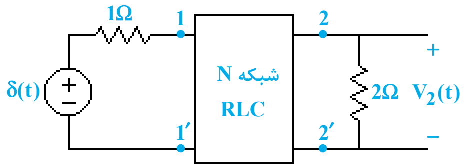
$$\frac{I_o}{I_{in}} = \frac{V_{in}}{V_o} \Rightarrow \frac{۲\angle -\frac{\pi}{۴}}{۵\angle -\frac{\pi}{۲}} = \frac{V_{in}}{V_o} \Rightarrow \frac{V_{in}}{V_o} = ۰/۴\angle \frac{\pi}{۴}$$

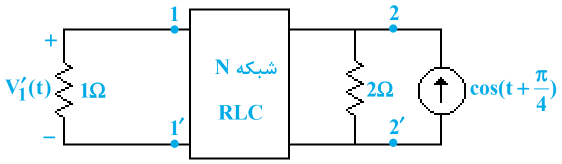
در صورت تعویض جای سلف و خازن، تابع شبکه $\frac{V_{in}}{V_o}$ به صورت $۰/۴\angle -\frac{\pi}{۴}$ خواهد شد. حال داریم:

$$\frac{V_{in}}{V_o} = ۰/۴\angle -\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{V_{in}}{۵\angle \frac{\pi}{۸}} = ۰/۴\angle -\frac{\pi}{۴} \Rightarrow V_{in} = ۲\angle -\frac{\pi}{۸} \Rightarrow V_{in} = ۲\cos(t - \frac{\pi}{۸})$$

مثال ۳۷: در مدار زیر، وقتی ورودی در قطب ۱ و ۱′ برابر δ(t) باشد، ولتاژ خروجی در قطب ۲ و ۲′ برابر $V_۲ = e^{-t}$ ولت است. اگر منبع تغذیه ورودی را اتصال کوتاه کنیم و در خروجی یک منبع جریان برابر $\cos(t + \frac{\pi}{۴})$ قرار دهیم، ولتاژ $V_۱'(t)$ در قطب ۱ و ۱′ برحسب ولت کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)





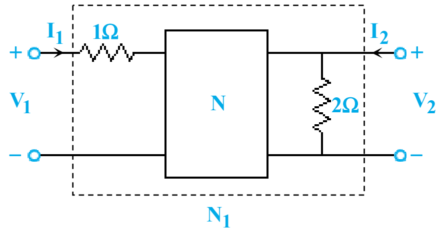
۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos(t - \frac{\pi}{۴})$

۲) $\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t + \frac{\pi}{۴})$

۳) $\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos t$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مطابق با حالت دوم از بیان سوم قضیه هم‌پاسخی، اگر دو قطبی $N_۱$ را مطابق شکل مقابل در فضای S در نظر بگیریم، در آزمایش اول داریم:



$$V_۱(S) = L\{\delta(t)\} = ۱, V_۲(S) = L\{e^{-t}\} = \frac{۱}{S+۱}$$

و در آزمایش دوم:

$$I_۲(S) = L\{\cos(t + \frac{\pi}{۴})\} = L\{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos t - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin t\} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{S-۱}{S^۲+۱}$$

مطلوب: $I_۱(S)$ و

www.modaresanesharif.ac.ir

و حال می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\frac{I_۱(S)}{I_۲(S)}}_{\text{آزمایش (۲)}}=-\underbrace{\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}}_{\text{آزمایش (۱)}}\Rightarrow\frac{I_۱(S)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{S-۱}{S^۲+۱}}=-\frac{\frac{۱}{S+۱}}{۱}\Rightarrow I_۱(S)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{S-۱}{(S+۱)(S^۲+۱)}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{S+۱}-\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}S}{S^۲+۱}\Rightarrow I_۱(t)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-t}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos t$$

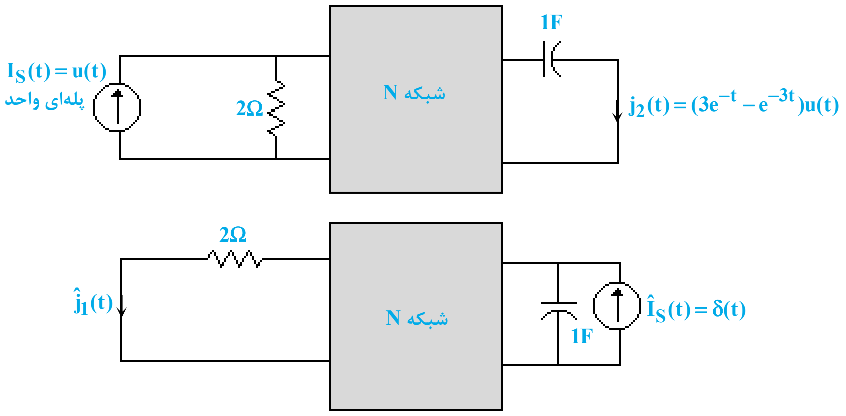
$$V_۱'(t)=-۱\times I_۱(t)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-t}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos t$$

اگر حالت دائمی مدار مدنظر باشد، می‌توان جزء گذرا را نادیده گرفت و داریم:

$$V_۱'(t)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos t$$

مثال ۳۸: دو آزمایش برای شبکه N که یک شبکه RLC خطی تغییرناپذیر با زمان است، در حالت صفر انجام شده است. مقدار $\hat{j}_۱(t)$ برای $t>۰$ و به ازای ورودی $\hat{I}_S(t)=\delta(t)$ کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



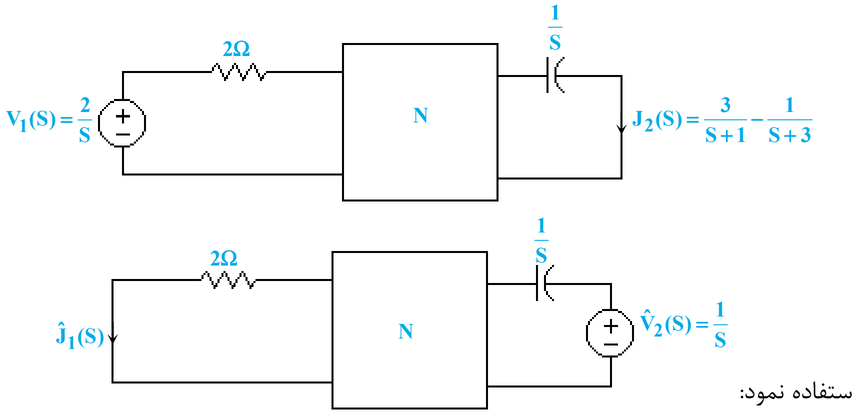
۱) $\hat{j}_۱(t)=\frac{۱}{۲}(۳e^{-t}+e^{-۳t})u(t)$

۲) $\hat{j}_۱(t)=\frac{۱}{۲}(۳e^{-t}-e^{-۳t})u(t)$

۳) $\hat{j}_۱(t)=\frac{۱}{۲}(e^{-۳t}+۳e^{-t})u(t)$

۴) $\hat{j}_۱(t)=\frac{۱}{۲}(e^{-۳t}-۳e^{-t})u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که شبکه RLC ساده یک شبکه متقابل است، در حل این تست می‌توانیم از قضیه هم‌پاسخی استفاده کنیم. بدین منظور ابتدا با تبدیل‌های نورتن به تونن مناسب، شرایط مورد نیاز برای بهره‌گیری از بیان‌های استاندارد قضیه هم‌پاسخی را فراهم می‌سازیم:

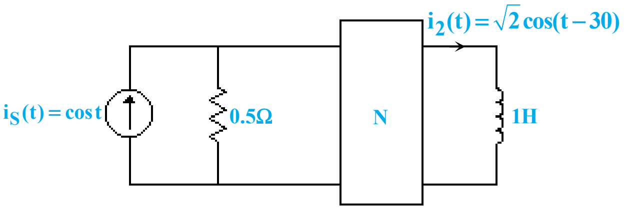


حال می‌توان از بیان اول قضیه هم‌پاسخی برای حل تست استفاده نمود:

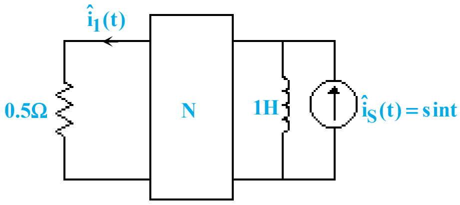
$$\frac{J_۲(S)}{V_۱(S)}=\frac{\hat{J}_۱(S)}{\hat{V}_۲(S)}\Rightarrow\frac{\frac{۳}{S+۱}-\frac{۱}{S+۳}}{\frac{۲}{S}}=\frac{\hat{J}_۱(S)}{\frac{۱}{S}}\Rightarrow\hat{J}_۱(S)=\frac{\frac{۳}{۲}}{S+۱}-\frac{\frac{۱}{۲}}{S+۳}\Rightarrow\hat{j}_۱(t)=\frac{۱}{۲}(۳e^{-t}-e^{-۳t})u(t)$$

مثال ۳۹: دو آزمایش زیر روی شبکه‌ی RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان N انجام شده است. مقدار $\hat{i}_۱(t)$ در حالت دائمی سینوسی در آزمایش دوم چقدر است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



آزمایش اول



آزمایش دوم

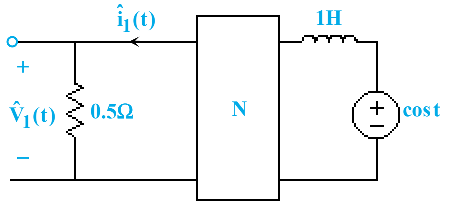
۱) $۲\sqrt{۲}\sin(t+۳۰^\circ)$

۲) $۲\sqrt{۲}\sin(t-۳۰^\circ)$

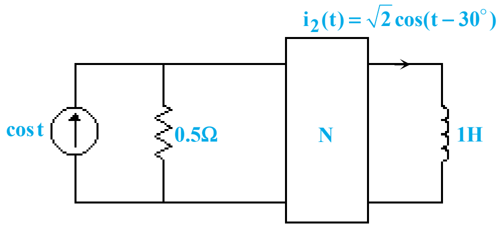
۳) $۲\sqrt{۲}\cos(t+۳۰^\circ)$

۴) $۲\sqrt{۲}\cos(t-۳۰^\circ)$

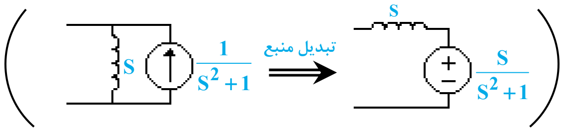
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این تست ابتدا با یک تبدیل منبع ساده در مدار آزمایش دوم، شرایط بهره‌گیری از بیان سوم قضیه هم‌پاسخی را فراهم می‌کنیم.



آزمایش دوم



آزمایش اول



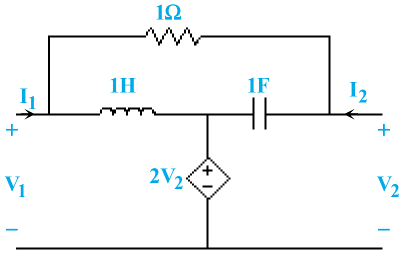
حال به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$\hat{V}_۱(t)=i_۲(t)=\sqrt{۲}\cos(t-۳۰^\circ)\quad\Rightarrow\hat{i}_۱(t)=\frac{\hat{V}_۱(t)}{۰/۵}=۲\sqrt{۲}\cos(t-۳۰^\circ)$$

فصل یازدهم

« شبکه‌های دو دریچه‌ای »

مثال ۴۰: **پارامتر $Z_{۱۱}$ دوقطبی شکل زیر، کدام است؟** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



۱) $\frac{S^۲+S}{S^۲+S+۱}$

۲) $\frac{S+۲}{S^۲+S+۱}$

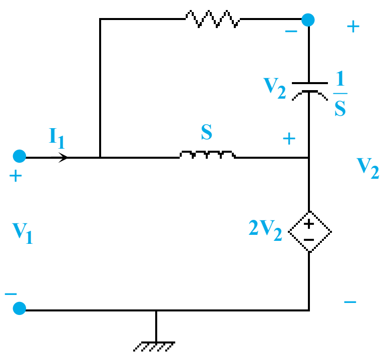
۳) $\frac{S^۲-S}{S^۲+S+۱}$

۴) $\frac{S+۱}{S^۲+S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که $Z_{۱۱}$ از رابطه روبه‌رو بدست می‌آید:

$$Z_{۱۱}=\left.\frac{V_۱}{I_۱}\right|_{I_۲=۰}$$

پس برای محاسبه $Z_{۱۱}$ باید نسبت $\frac{V_۱}{I_۱}$ را در مدار مقابل بدست آوریم:



با توجه به این که ولتاژ دو سر خازن برابر $V_۲$ می‌باشد، با نوشتن رابطه KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_۱-V_۲}{۱}=-\frac{V_۲}{\frac{۱}{S}}\Rightarrow V_۱=(۱-S)V_۲\Rightarrow V_۲=\frac{۱}{۱-S}V_۱\qquad(۱)$$

حال در گره سمت چپ مدار KCL می‌زنیم:

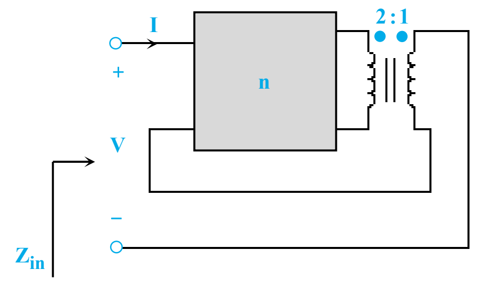
$$I_۱=\frac{V_۱-۲V_۲}{S}+\frac{V_۱-V_۲}{۱}\xrightarrow{(۱)}I_۱=\frac{S+۱}{S}V_۱-\frac{S+۲}{S}\times\frac{۱}{۱-S}V_۱=\frac{S^۲-۱+S+۲}{S(S-۱)}V_۱=\frac{S^۲+S+۱}{S(S-۱)}V_۱$$

$$Z_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}=\frac{S(S-۱)}{S^۲+S+۱}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

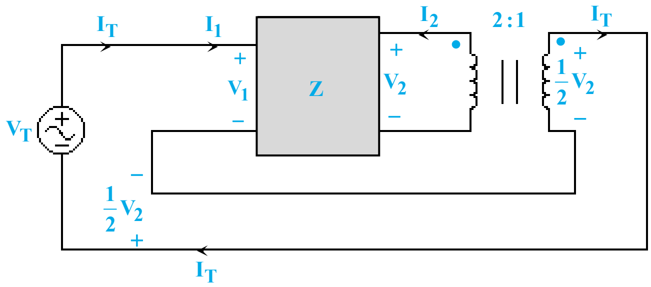
مثال ۴۱: در مدار زیر امپدانس ورودی Z_{in} چند اهم است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

(پارامترهای امپدانس دوقطبی n برابر با: $Z_{۱۲} = Z_{۲۱} = ۱۰\Omega$ ، $Z_{۲۲} = ۴\Omega$ و $Z_{۱۱} = ۱\Omega$ است.)



۱) -۸
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با اضافه کردن منبع تست V_T و نوشتن KVL در حلقه ورودی داریم:



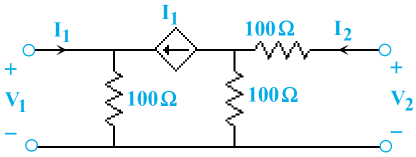
$$V_T = V_۱ - \frac{۱}{۲}V_۲ \quad , \quad \begin{cases} V_۱ = I_۱ + ۱۰ I_۲ \\ V_۲ = ۱۰ I_۱ + ۴I_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_T = I_۱ + ۱۰ I_۲ - \frac{۱}{۲}(۱۰ I_۱ + ۴I_۲) \quad \Rightarrow \quad V_T = -۴I_۱ + ۸I_۲$$

$$I_۱ = I_T \quad , \quad \frac{I_۲}{I_T} = \frac{-۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad I_۲ = -\frac{۱}{۲}I_T$$

$$\Rightarrow \quad V_T = -۴I_T + ۸(-\frac{۱}{۲}I_T) = -۸I_T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R_{th}} = \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{I_T}} = -۸\Omega$$

مثال ۴۲: پارامترهای ادمیتانس شبکه دوقطبی روبرو (برحسب میلی‌زیمنس) کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



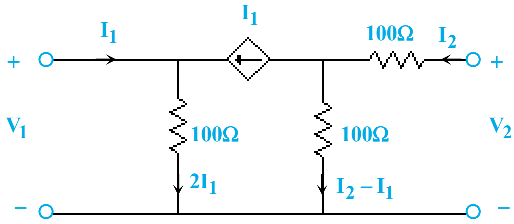
۱) $Y = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ \\ -۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۲) $Y = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix}$

۳) $Y = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$

۴) $Y = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۲/۵ & ۵ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای حل این تست، ابتدا ماتریس امپدانس را محاسبه کرده و سپس با محاسبه معکوس آن، ماتریس ادمیتانس را بدست می‌آوریم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_۱ = ۲I_۱ \times ۱۰۰ = ۲۰۰ I_۱ \qquad (۱)$$

حال در حلقه سمت راست KVL می‌زنیم:

$$V_۲ = ۱۰۰ I_۲ + ۱۰۰ \times (I_۲ - I_۱) = -۱۰۰ I_۱ + ۲۰۰ I_۲ \qquad (۲)$$

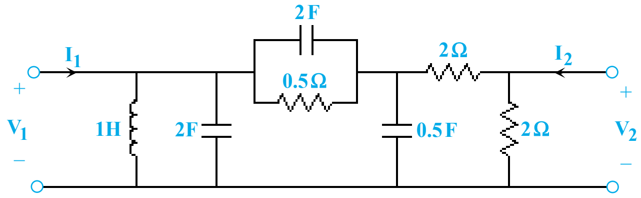
اکنون با توجه به روابط (۱) و (۲) ماتریس‌های امپدانس و ادمیتانس مدار بصورت زیر خواهند بود:

$$Z = \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۰ \\ -۱۰۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} \quad , \quad Y = Z^{-۱} = \frac{۱}{۲۰۰^۲}\begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۰ \\ ۱۰۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲۰۰} & ۰ \\ \frac{۱}{۴۰۰} & \frac{۱}{۲۰۰} \end{bmatrix} \ \text{Siemens}$$

$$\Rightarrow Y = ۱۰۰۰ \times \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲۰۰} & ۰ \\ \frac{۱}{۴۰۰} & \frac{۱}{۲۰۰} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۲/۵ & ۵ \end{bmatrix} \ \text{m Siemens}$$

دقت کنید که واحدهای زیمنس و مهو با یکدیگر معادل هستند، یعنی ۱ مهو برابر ۱ زیمنس است و بالعکس.

مثال ۴۳: پارامتر $y_{۲۱}$ دوقطبی مقابل کدام است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)



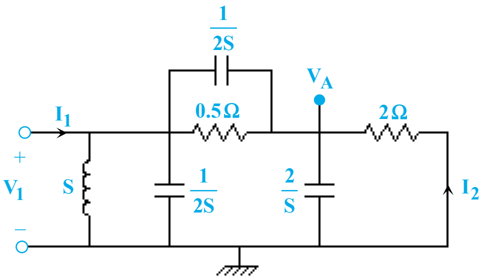
۱) $-\frac{۲}{۵}$

۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۱۲}{۵}S + \frac{۱}{S} + \frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{۱۲}{۵S} + S + \frac{۵}{۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

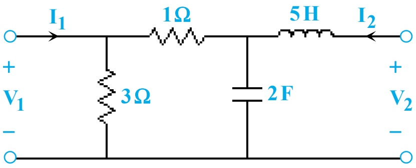


☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه $y_{۲۱} = \frac{I_۲}{V_۱}\Big|_{V_۲=۰}$ است، باید $V_۲$ را اتصال کوتاه کرده و در گره (A)، KCL بزنیم.

$$V_A = -۲I_۲ \Rightarrow I_۲ = \frac{-۲I_۲}{\frac{۲}{S}} + \frac{-۲I_۲ - V_۱}{۰/۵} + \frac{-۲I_۲ - V_۱}{\frac{۱}{۲S}}$$

$$I_۲ = -SI_۲ - ۴I_۲ - ۲V_۱ - ۴SI_۲ - ۲SV_۱ \Rightarrow I_۲(۵+۵S) = V_۱(-۲-۲S) \Rightarrow y_{۲۱} = \frac{I_۲}{V_۱} = \frac{-۲-۲S}{۵+۵S} = \frac{-۲(S+۱)}{۵(S+۱)} = -\frac{۲}{۵}\mho$$

مثال۴۴: در مدار دوقطبی زیر، پارامتر ادمیتانس $y_{۱۲}$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



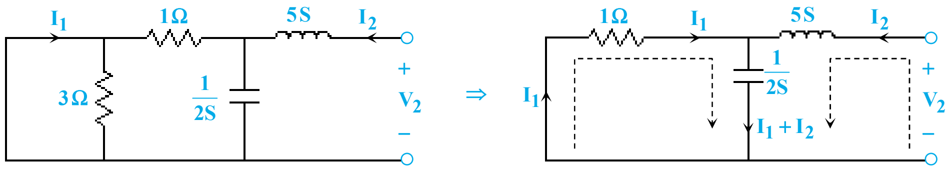
۱) $\frac{-۱}{۱+۵S-۱۰S^۲}$

۲) $\frac{-۱}{۱+۵S-۵S^۲}$

۳) $\frac{-۱}{۱+۵S+۵S^۲}$

۴) $\frac{-۱}{۱+۵S+۱۰S^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه $y_{۱۲} = \frac{I_۱}{V_۲}\Big|_{V_۱=۰}$ برای محاسبه $y_{۱۲}$، $V_۱$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و بنابراین ورودی مدار را اتصال کوتاه می‌کنیم. حال مقاومت ۳ اهمی موازی با اتصال کوتاه حذف می‌شود.



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$V_۲ = ۵SI_۲ + \frac{۱}{۲S}(I_۱ + I_۲) \qquad (۱)$$

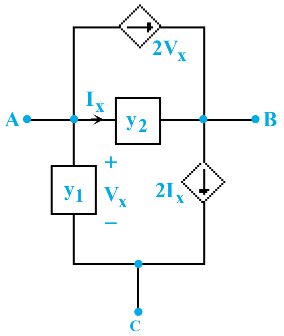
با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:

$$I_۱ \times ۱ + \frac{۱}{۲S}(I_۱ + I_۲) = ۰ \Rightarrow I_۲ = -I_۱(۱+۲S) \qquad (۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$V_۲ = ۵S[-I_۱(۱+۲S)] + \frac{۱}{۲S}[I_۱ - I_۱(۱+۲S)] \Rightarrow y_{۱۲} = \frac{I_۱}{V_۲} = \frac{-۱}{۱۰S^۲ + ۵S + ۱}$$

مثال۴۵: در مدار سه سر زیر فرض کنید سر B زمین شود و یک دوقطبی به‌دست آید که سرهای A و B آن قطب ′۱ و ۱ و سرهای C و B آن قطب ۲ و ′۲ باشد. پارامترهای y این دوقطبی، کدام است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)

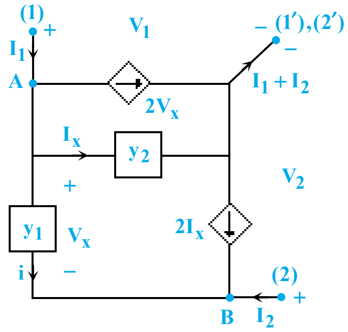


۱) $\begin{bmatrix} y_۱ + y_۲ - ۲ & -y - ۲ \\ y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} y_۱ + y_۲ + ۲ & -y_۱ + ۲ \\ -y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} y_۱ + y_۲ - ۲ & -y - ۲ \\ -y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} y_۱ + y_۲ + ۲ & -y - ۲ \\ -y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ \end{bmatrix}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به توضیحات صورت سؤال، می‌توان مدار را به شکل زیر در نظر گرفت:

با نوشتن رابطه KVL برای حلقه بیرونی مدار داریم:

$$V_x = V_۱ - V_۲$$

و در نتیجه:

$$i = y_۱V_x = y_۱(V_۱ - V_۲)$$

از طرفی داریم:

$$I_x = y_۲V_۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

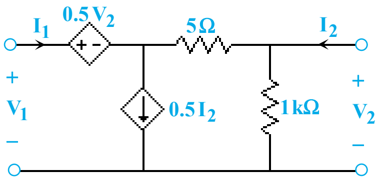
حال در گره‌های A، B و KCL می‌زنیم:

$$KCL(A): I_۱ = ۲V_x + I_x + i = ۲\times(V_۱ - V_۲) + y_۲V_۱ + y_۱(V_۱ - V_۲) = (۲ + y_۱ + y_۲)V_۱ + (-۲ - y_۱)V_۲ \qquad (۱)$$

$$KCL(B): I_۲ = -i - ۲I_x = -y_۱(V_۱ - V_۲) - ۲y_۲V_۱ = (-y_۱ - ۲y_۲)V_۱ + y_۱V_۲ \qquad (۲)$$

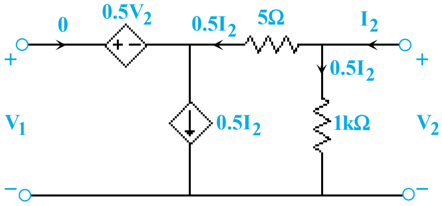
$$(۱) و (۲) \Rightarrow \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ + y_۱ + y_۲ & -۲ - y_۱ \\ -y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} ۲ + y_۱ + y_۲ & -۲ - y_۱ \\ -y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۴۶: **در مدار دوقطبی شکل زیر پارامتر هایبرید $h_{۱۲}$ چقدر است؟** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



۱) ۳/۵−
۲) ۲−
۳) ۱/۵
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تعریف $h_{۱۲}$ $\left(h_{۱۲} = \frac{V_۱}{V_۲}\Big|_{I_۱ = ۰}\right)$ در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم.



$$V_۱ = ۰/۵V_۲ - ۰/۵I_۲ \times ۵ + V_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن قانون اهم برای مقاومت ۱kΩ داریم:

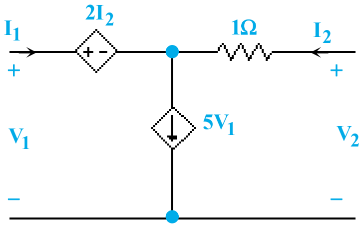
$$\frac{V_۲}{۱۰۰۰} = ۰/۵I_۲ \Rightarrow I_۲ = \frac{V_۲}{۵۰۰} \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$(۱) و (۲) \Rightarrow V_۱ = ۰/۵V_۲ - ۰/۵\frac{V_۲ \times ۵}{۵۰۰} + V_۲$$

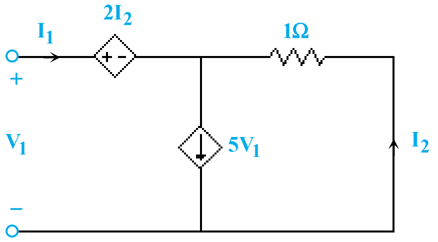
$$V_۱ = V_۲(۰/۵ + ۱ - \frac{۵}{۱۰۰۰}) \Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} \approx ۱/۵ = h_{۱۲}$$

مثال ۴۷: **در مدار دوقطبی زیر، مقدار پارامتر $h_{۱۱}$ در ماتریس هایبرید H چقدر است؟** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



۱) $\frac{۱}{۴}\Omega$
۲) $\frac{۳}{۴}\Omega$
۳) $\frac{۱}{۴}℧$
۴) $\frac{۳}{۴}℧$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف می‌دانیم $h_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{V_۲ = ۰}$. برای محاسبه $h_{۱۱}$ باید مدار را به شکل زیر در نظر بگیریم:



با یک KCL ساده در گره مرکزی مدار داریم:

$$I_۱ + I_۲ = ۵V_۱ \Rightarrow I_۲ = ۵V_۱ - I_۱$$

حال در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم:

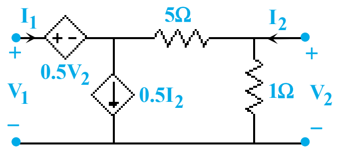
$$V_۱ = ۲I_۲ - ۱\times I_۲ = I_۲ = ۵V_۱ - I_۱ \Rightarrow ۴V_۱ = I_۱ \Rightarrow \frac{V_۱}{I_۱} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow h_{۱۱} = \frac{۱}{۴}\Omega$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۸: **در مدار دوقطبی زیر، پارامتر هیبرید $h_{۱۲}$ کدام است؟**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)

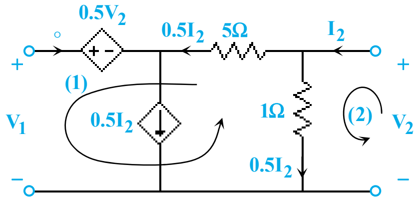


۱) $-۳/۵$
۲) -۲
۳) $۱/۵$
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف داریم:

$$h_{۱۲} = \frac{V_۱}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰}$$

لذا با فرض $I_۱ = ۰$، مقدار $\frac{V_۱}{V_۲}$ را به‌دست می‌آوریم. مطابق شکل می‌توان جریان شاخه‌ها را به‌راحتی برحسب $I_۲$ مشخص نمود. حال داریم:



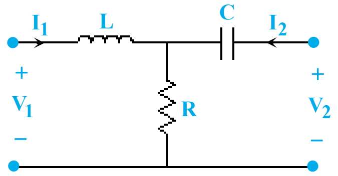
$$\text{KVL}(۲): V_۲ = ۱\times ۰/۵I_۲ \Rightarrow I_۲ = ۲V_۲ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL}(۱): V_۱ - V_۲ + ۵\times ۰/۵I_۲ - ۰/۵V_۲ = ۰ \xrightarrow{(۱)} V_۱ - ۱/۵V_۲ + ۲/۵\times ۲V_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow V_۱ = -۳/۵V_۲ \Rightarrow h_{۱۲} = \frac{V_۱}{V_۲} = -۳/۵$$

مثال۴۹: **پارامترهای هایبرید $h_{۱۱}$ و $h_{۲۱}$ برای مدار دوقطبی زیر به ترتیب کدام است؟ ($L = ۰/۱H$، $C = ۰/۰۱F$ و $R = ۱\Omega$)**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)



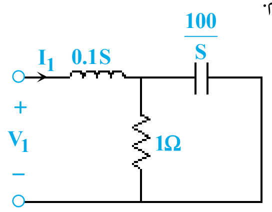
۱) $۰/۱S + \frac{۱}{۰/۰۱S+۱}$, $\frac{۱}{۰/۰۱S+۱}$

۲) $۰/۱S + \frac{۱}{۰/۰۱S} + ۱$, $\frac{۱}{۰/۰۱S+۱}$

۳) $\frac{۰/۰۰۱S^۲ + ۰/۰۱S + ۱}{۰/۰۱S}$, $\frac{-۱}{۰/۰۱S+۱}$

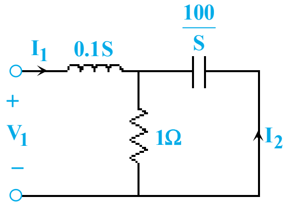
۴) $\frac{۰/۰۰۱S^۲ + ۰/۱S + ۱}{۰/۰۱S+۱}$, $\frac{-۱}{۰/۰۱S+۱}$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا با توجه به تعریف $h_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰}$ مقدار $h_{۱۱}$ را محاسبه می‌کنیم.



$$\Rightarrow h_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱} = ۰/۱S + \frac{۱\times \frac{۱۰۰}{S}}{۱+\frac{۱۰۰}{S}} = ۰/۱S + \frac{۱}{۰/۰۱S+۱}$$

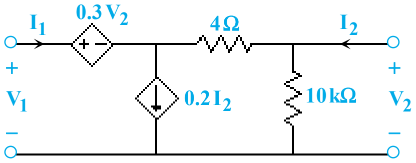
حال با توجه به تعریف $h_{۲۱} = \frac{I_۲}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰}$ مقدار $h_{۲۱}$ را محاسبه می‌کنیم.



$$I_۲ = -I_۱ \times \frac{۱}{۱+\frac{۱۰۰}{S}} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = \frac{-S}{S+۱۰۰} \Rightarrow h_{۲۱} = \frac{I_۲}{I_۱} = \frac{-S}{S+۱۰۰} = \frac{-۰/۰۱S}{۰/۰۱S+۱}$$

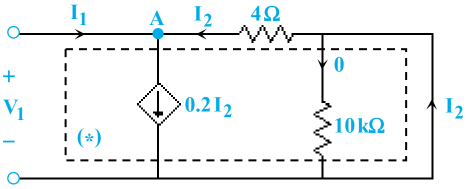
مثال۵۰: **در مدار دوقطبی شکل زیر پارامترهای هیبرید $h_{۱۱}$، $h_{۲۲}$ به ترتیب چند اهم و چند زیمنس می‌باشند؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)



۱) ۲ و $۰/۸\times ۱۰^{-۴}$
۲) ۵ و $۰/۸\times ۱۰^{-۴}$
۳) ۲ و $۱/۲۵\times ۱۰^{-۴}$
۴) ۵ و $۱/۲۵\times ۱۰^{-۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا پارامتر $h_{۱۱}$ را محاسبه می‌کنیم و با توجه به تعریف آن $V_۲$ را صفر فرض می‌کنیم.



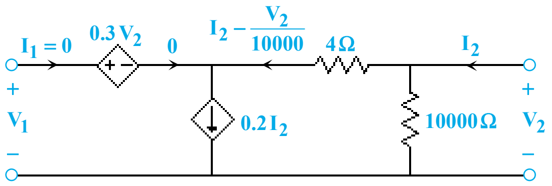
$$h_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰}$$

$$\text{KVL}(*): V_۱ = -۴I_۲ \qquad (۱)$$

$$\text{KCL}(A): I_۱ + I_۲ = ۰/۲I_۲ \Rightarrow I_۱ + ۰/۸I_۲ = ۰ \Rightarrow I_۲ = -۱/۲۵I_۱ \qquad (۲)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:



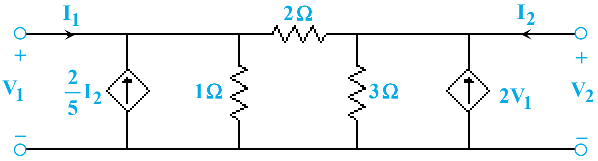
$$\Rightarrow\ V_۱=-۴\times(-۱/۲۵I_۱)\ \Rightarrow\ V_۱=۵I_۱\ \Rightarrow\ \mathbf{h_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}=۵\Omega}$$

حالا با توجه به تعریف $h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰}$ داریم:

$$KCL(A):\ ۰/۲I_۲=I_۲-\frac{V_۲}{۱۰۰۰۰}\ \Rightarrow\ ۰/۸I_۲=\frac{V_۲}{۱۰۰۰۰}\ \Rightarrow\ \mathbf{h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}=۱/۲۵\times۱۰^{-۴}\ \mho}$$

مثال۵۱: **ماتریس پارامترهای H دوقطبی زیر کدام است؟** $\begin{pmatrix}V_۱\\I_۲\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}I_۱\\V_۲\end{pmatrix}$

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)



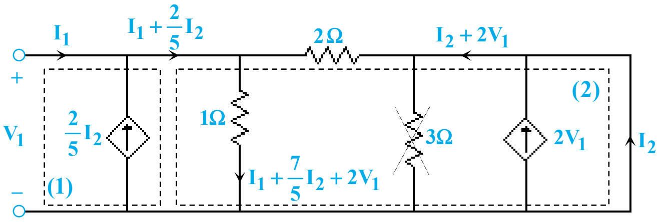
۱) $H=\begin{pmatrix}-\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۳}\\ ۰ & -۱\end{pmatrix}$

۲) $H=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۳}\\ ۱ & -۱\end{pmatrix}$

۳) $H=\begin{pmatrix}\frac{۴}{۱۰} & \frac{۱}{۳}\\ -۱ & ۰\end{pmatrix}$

۴) $H=\begin{pmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۵}\\ -۱ & ۰\end{pmatrix}$

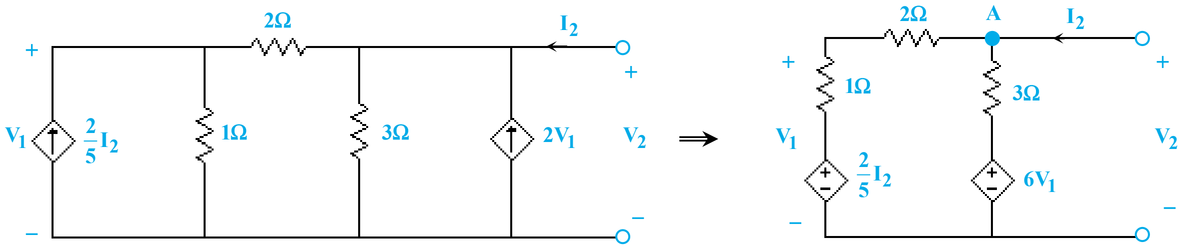
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا به محاسبه پارامتر $h_{۱۱}$ می‌پردازیم. دقت کنید که مقاومت ۳ اهمی به علت موازی بودن با اتصال کوتاه حذف می‌شود.



$$h_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰}$$

$$\begin{cases}KVL(۱):V_۱=۱\times[I_۱+\frac{۷}{۵}I_۲+۲V_۱]\ \Rightarrow\ V_۱=-I_۱-\frac{۷}{۵}I_۲ & (۱)\\ KVL(۲):\ ۲(I_۲+۲V_۱)+V_۱=۰\ \Rightarrow\ I_۲=-\frac{۵}{۲}V_۱ & (۲)\end{cases}\xrightarrow{(۱),(۲)}V_۱=-I_۱-\frac{۷}{۵}\times(-\frac{۵}{۲})V_۱\ \Rightarrow\ \mathbf{h_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}=\frac{۴}{۱۰}\Omega}$$

حال به سراغ محاسبه $h_{۲۲}$ می‌رویم. بدین منظور مدار معادل زیر را در نظر می‌گیریم:



$$h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰}$$

حال مدار معادل سمت راست را که با تبدیل منابع جریان در مدار اصلی به دست آمده در نظر گرفته و در گره A، KCL می‌زنیم:

$$I_۲=\frac{V_۲-۶V_۱}{۳}+\frac{V_۲-V_۱}{۲}\xrightarrow{\times۶}۶I_۲=۵V_۲-۱۵V_۱\Rightarrow V_۱=\frac{V_۲}{۳}-\frac{۲}{۵}I_۲\qquad(۳)$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$V_۱=\frac{۲}{۵}I_۲+۱\times\frac{V_۲-V_۱}{۲}\ \Rightarrow ۳V_۱=\frac{۴}{۵}I_۲+V_۲\ \ \Rightarrow V_۱=\frac{V_۲}{۳}+\frac{۴}{۱۵}I_۲\qquad(۴)$$

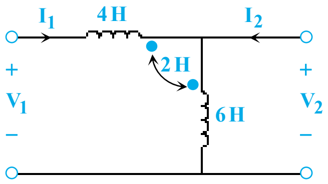
از (۳) و (۴) داریم:

$$\frac{V_۲}{۳}-\frac{۲}{۵}I_۲=\frac{V_۲}{۳}+\frac{۴}{۱۵}I_۲\ \Rightarrow I_۲=۰\ \Rightarrow\ h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}=۰$$

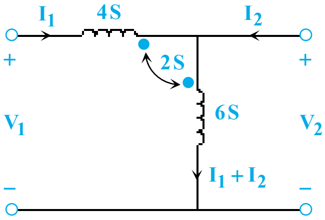
تنها گزینه‌ای که در آن $h_{۱۱}=۰/۴$ و $h_{۲۲}=۰$ می‌باشد، گزینه (۳) است.

مثال۵۲: **دوقطبی شکل زیر، کدام است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



۱) فقط متقارن
۲) فقط متقابل
۳) هم‌پاسخ و متقارن
۴) هم‌پاسخ و متقابل



☑ **پاسخ:** گزینه‌های «۳ و ۴» قضیه هم‌پاسخی برای کلیه مدارات شامل عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان R و L و C و سلف‌های تزویج شده صادق است. برای تشخیص متقارن یا متقابل بودن مدار لازم است که ماتریس امپدانس مدار را محاسبه کنیم. دقت کنید که القای متقابل سلف‌ها منفی می‌باشد.

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_۱ = ۴SI_۱ - ۲S(I_۱ + I_۲) + ۶S(I_۱ + I_۲) - ۲SI_۱ \Rightarrow V_۱ = ۶SI_۱ + ۴SI_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V_۲ = ۶S(I_۱ + I_۲) - ۲SI_۱ \Rightarrow V_۲ = ۴SI_۱ + ۶SI_۲ \quad (۲)$$

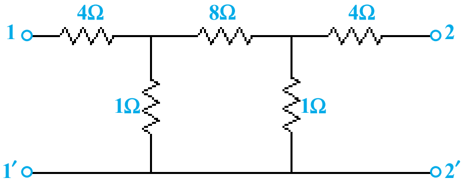
با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$Z = \begin{bmatrix} ۶S & ۴S \\ ۴S & ۶S \end{bmatrix}$$

با توجه به برابر بودن $Z_{۲۲}$ با $Z_{۱۱}$ و $Z_{۲۱}$ با $Z_{۱۲}$، دوقطبی متقابل و متقارن است. با توجه به المان‌های موجود در مدار و متقابل بودن آن، مدار هم‌پاسخ نیز می‌باشد.

مثال ۵۳: ماتریس انتقال (T) دوقطبی زیر، کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



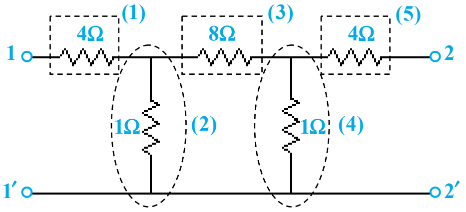
۱) $\begin{bmatrix} ۴۹ & ۲۴۰\Omega \\ ۱۰\mho & ۴۹ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۴۹ & ۸۴\Omega \\ ۶۰\mho & ۴۹ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۷۱ & ۸۴\Omega \\ ۶۰\mho & ۷۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۷۱ & ۲۴۰\Omega \\ ۱۰\mho & ۷۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با در نظر گرفتن دوقطبی به‌صورت مدارهای متوالی و استفاده از روابط موجود برای محاسبه ماتریس T، می‌توان به راحتی به جواب رسید:

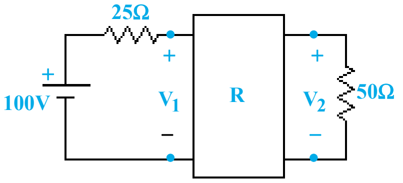


$$T_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, T_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, T_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۸ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, T_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, T_۵ = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$T = T_۱ \times T_۲ \times T_۳ \times T_۴ \times T_۵ = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۸ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۹ & ۲۴۰ \\ ۱۰ & ۴۹ \end{bmatrix}$$

مثال ۵۴: در مدار زیر اگر پارامترهای ادمیتانس دوقطبی R برحسب میلی زیمنس به صورت زیر باشد، ولتاژ ورودی V_1 چند ولت است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



$$y = \begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۵۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

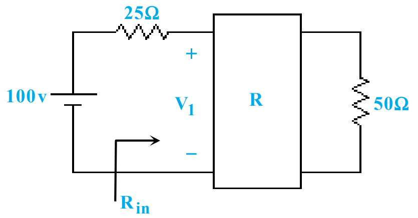
۱) $\frac{۴۸۰}{۹}$

۲) $\frac{۴۸۰}{۷}$

۳) $\frac{۶۴۰}{۹}$

۴) $\frac{۶۴۰}{۷}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مقاومت ورودی شبکه دوقطبی را با توجه به روابط ارائه شده در متن کتاب محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{۱}{R_{in}} = y_{۱۱} - \frac{y_{۱۲}y_{۲۱}}{y_{۲۲} + \frac{۱}{R_L}} = ۱۰\times۱۰^{-۳} - \frac{-۵\times۵۰\times۱۰^{-۶}}{۲۰\times۱۰^{-۳} + \frac{۱}{۵۰}} = ۰/۰۱ + \frac{۱}{۱۶۰} = \frac{۲۶}{۱۶۰۰}\mho$$

$$\Rightarrow R_{in} = \frac{۱۶۰۰}{۲۶}\Omega$$

اکنون با استفاده از تکنیک تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_۱ = \frac{\frac{۱۶۰۰}{۲۶}}{\frac{۱۶۰۰}{۲۶} + ۲۵} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶۰۰}{۲۲۵۰} \times ۱۰۰ = \frac{۶۴۰}{۹} v$$

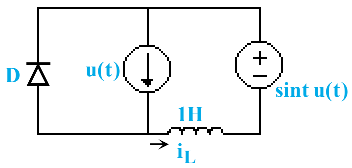
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل دوازدهم

« مدارهای غیرخطی، تقویت‌کننده عملیاتی و انتگرال کانولوشن »

مثال ۵۵: در مدار روبه‌رو، جریان i_L در $t=\frac{\pi}{۴}$، چند آمپر است؟ دیود D ایدئال و جریان اولیه سلف، صفر می‌باشد. $(i_L(۰)=۰)$

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



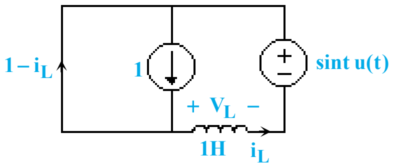
۱) $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) ۰

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این‌که جریان اولیه سلف صفر است، جریان منبع $u(t)$ در لحظه اول به ناچار باید از دیود عبور کند. بنابراین در لحظات اول دیود مطمئناً روشن خواهد بود. در این حالت داریم:



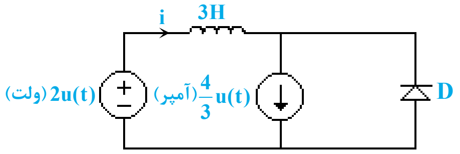
$$\begin{cases} V_L = \sin t\, u(t) \\ i_L(۰)=۰ \end{cases} \Rightarrow i_L=(۱-\cos t)u(t)$$

تا زمانی‌که مقدار i_L به ۱ آمپر نرسیده است، دیود روشن باقی خواهد ماند. این زمان برابر $t=\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. بنابراین در $t=\frac{\pi}{۴}$ داریم:

$$i_L(\frac{\pi}{۴})=۱-\cos\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

مثال ۵۶: در مدار زیر، سلف دارای حالت اولیه صفر و دیود D ایده‌آل است. جریان i گذرنده از سلف برای $t>۲s$ چند آمپر است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)



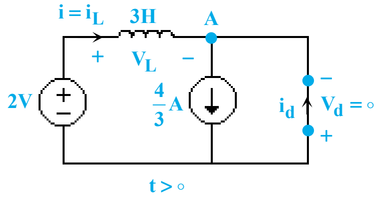
۱) ۰

۲) $\frac{۲}{۳}t$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جریان اولیه‌ی سلف صفر بوده و می‌دانیم که مگر در شرایط خاص جریان سلف نمی‌تواند جهش ناگهانی داشته باشد؛ لذا جریان منبع جریان $\frac{۴}{۳}u(t)$ نمی‌تواند در لحظه‌ی $t=۰^+$ از سلف بگذرد. به ناچار دیود D روشن می‌شود تا مسیری برای عبور این جریان باز شود. با روشن شدن دیود ولتاژ دو سر آن صفر شده و مطابق شکل ولتاژی معادل ۲ ولت بر روی سلف قرار می‌گیرد:



$$V_L=۲v$$

بنابراین سلف شروع به شارژ شدن کرده و جریانش مطابق رابطه‌ی زیر بزرگ می‌شود:

$$i_L(t)=\frac{۱}{L}\int_{۰}^{t}V_L dt+i_L(۰)=\frac{۱}{۳}\int_{۰}^{t}۲.dt+۰=\frac{۲t}{۳}$$

با توجه به شکل فوق، جریان دیود نیز طبق رابطه‌ی مقابل کاهش پیدا می‌کند:

$$KCL\ A: i_d=\frac{۴}{۳}-i_L=\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}t$$

مسلماً روابط فوق تا زمانی معتبر خواهند بود که جریان دیود مثبت باشد. با صفر شدن جریان دیود، دیود خاموش شده و جریان منبع $\frac{۴}{۳}$ آمپری به طور کامل از سلف خواهد گذشت؛ این اتفاق در لحظه‌ی $t=۲$ ثانیه رخ خواهد داد:

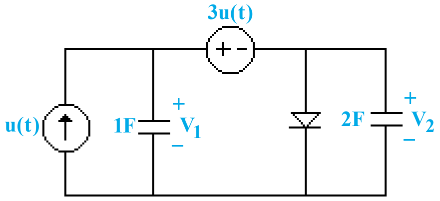
$$i_d(t)=\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}t=۰ \Rightarrow t=۲sec \quad , \quad i_L(t=۲)=۲\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}A$$

پس از لحظه‌ی $t=۲$ ثانیه، ولتاژ ۲ ولتی منبع ولتاژ به‌طور کامل بر روی منبع جریان قرار گرفته و ولتاژ دو سر سلف صفر خواهد بود. بدین شکل جریان سلف برابر $\frac{۴}{۳}$ آمپر باقی خواهد ماند.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵۷: در مدار زیر، ولتاژ اولیه خازن‌ها در لحظه $t = ۰^-$ صفر است. ولتاژ $V_۱$ در لحظه $t = ۲s$ چند ولت است؟ دیود را ایده‌آل فرض کنیـد. $u(t)$ پله واحد می‌باشد.

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)



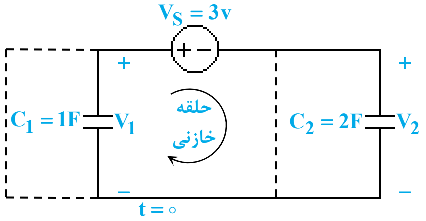
۱) ۰

۲) $۱\frac{۱}{۳}$

۳) $۲\frac{۲}{۳}$

۴) ۳

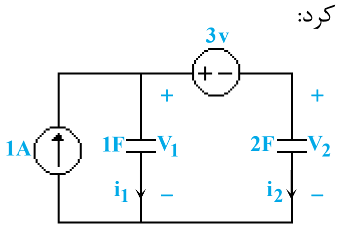
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای تحلیل این مدار اولین نکته‌ای که باید در نظر گرفت این است که در لحظه $t = ۰$ یک حلقه خازنی در مـدار ایجـاد می‌شـود و این حلقه، ولتاژ خازن‌ها را به شکل آنی تغییر می‌دهد. برای محاسبه ولتاژ خازن‌ها در $t = ۰^+$، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:



$$V_۱(۰^+) = \frac{C_۲}{C_۱ + C_۲} V_S = \frac{۲}{۱+۲} \times ۳ = ۲v$$

$$V_۲(۰^+) = -\frac{C_۱}{C_۱ + C_۲} V_S = -\frac{۱}{۱+۲} \times ۳ = -۱v$$

با توجه به منفی بودن ولتاژ $V_۲$ در لحظه $t = ۰^+$، دیود در این لحظه قطع است و مدار را می‌توان به شکل زیر تحلیل کرد:



$$V_۱ = ۳ + V_۲ \qquad (۱)$$

$$۱ = i_۱ + i_۲ = \frac{dV_۱}{dt} + ۲\frac{dV_۲}{dt} \xrightarrow{(۱)} ۱ = \frac{dV_۱}{dt} + \frac{۲dV_۱}{dt} = \frac{۳dV_۱}{dt} \Rightarrow \frac{dV_۱}{dt} = \frac{۱}{۳}\frac{v}{sec}$$

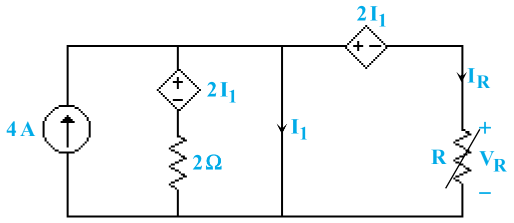
$$\Rightarrow V_۱(t) = \frac{t}{۳} + ۲ \;\; , \; V_۲(t) = V_۱(t) - ۳ = \frac{t}{۳} - ۱$$

طبق روابط فوق، منبع جریان $u(t)$، خازن‌های مدار را در $t > ۰$ شارژ می‌کند، این روند شارژ شدن تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که ولتاژ خازن $C_۲$ صفر شده و در آستانه مثبت شدن باشد. در این لحظه دیود موازی با آن روشن شده و از شارژ شدن بیشتر آن جلوگیری می‌کند. این امر در لحظه $t = ۳$ ثانیه رخ می‌دهد: $V_۲(t) = \frac{t}{۳} - ۱ = ۰ \Rightarrow t = ۳sec$

از آنجایی که سؤال مقدار $V_۱(t)$ را در لحظه $t = ۲$ ثانیه (یعنی قبل از $t = ۳$ ثانیه) خواسته است، مقدار این متغیر را می‌توان از همان رابطه قبلـی محاسـبه کرد: $V_۱(t) = \frac{t}{۳} + ۲ = \frac{۲}{۳} + ۲ = ۲\frac{۲}{۳} v$

مثال ۵۸: در مدار غیرخطی زیر، ولتاژ V_R چند ولت می‌تواند باشد؟ مقاومت غیرخطی R با رابطه‌ی $I_R = V_R^۲ + ۳V_R$، توصیف می‌شود.

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)

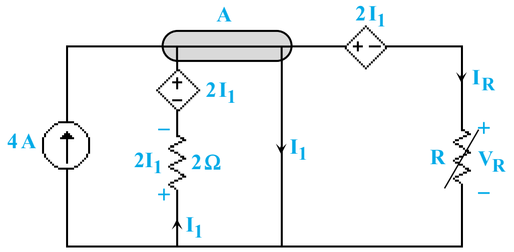


۱) ۲

۲) ۳

۳) ۲ و -۲

۴) ۱ و -۴



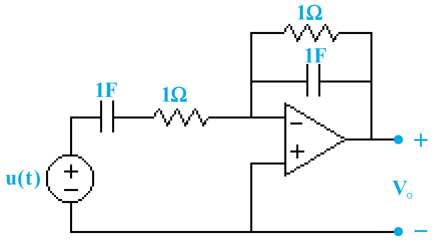
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه منبع وابسته $۲I_۱$ و مقاومت ۲ اهمی سری با آن در یک حلقه قرار دارند، لذا ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهمی برابر $۲I_۱$ و جریان آن نیز برابر $I_۱$ خواهد بود. حال با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$۴ + I_۱ = I_۱ + I_R \quad \Rightarrow \quad I_R = ۴A$$

با قرار دادن $I_R = ۴A$ در رابطه المان غیرخطی داریم:

$$I_R = V_R^۲ + ۳V_R \;\Rightarrow\; ۴ = V_R^۲ + ۳V_R \;\Rightarrow\; V_R^۲ + ۳V_R - ۴ = ۰ \;\Rightarrow\; (V_R - ۱)(V_R + ۴) = ۰ \;\Rightarrow\; \mathbf{V_R = ۱v} \text{ و } \mathbf{V_R = -۴v}$$

مثال ۵۹: پاسخ پله $V_o(t)$ مدار زیر، کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- سراسری ۹۷)



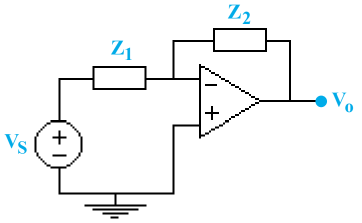
۱) $-te^{-t}u(t)$

۲) $\delta(t)-te^{-t}u(t)$

۳) $-۲te^{-t}u(t)$

۴) $\delta(t)+۲te^{-t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مدار موجود یک مدار تقویت‌کننده‌ی ولتاژ منفی‌ساز است که بهره‌ی آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



$$A_V=\frac{V_o}{V_S}=-\frac{Z_۲}{Z_۱}$$

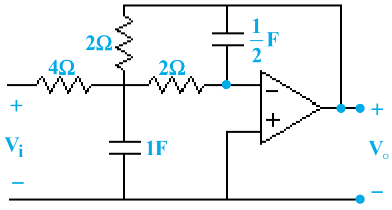
مقادیر $Z_۱$ و $Z_۲$ در فضای S برابر است با:

$$Z_۱=\frac{۱}{S}+۱\quad,\quad Z_۲=۱\Omega\,||\,\frac{۱}{S}=\frac{۱\times\frac{۱}{S}}{۱+\frac{۱}{S}}=\frac{۱}{S+۱}$$

بنابراین داریم:

$$V_o=-\frac{Z_۲}{Z_۱}\times V_S=-\frac{\frac{۱}{S+۱}}{\frac{۱}{S}+۱}\times\frac{۱}{S}=-\frac{۱}{(S+۱)^۲}\Rightarrow V_o(t)=L^{-۱}\{-\frac{۱}{(S+۱)^۲}\}=-te^{-t}u(t)$$

مثال ۶۰: مدار زیر با تابع تبدیل شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_i}$ مانند کدام فیلتر رفتار می‌کند؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- سراسری ۹۷)



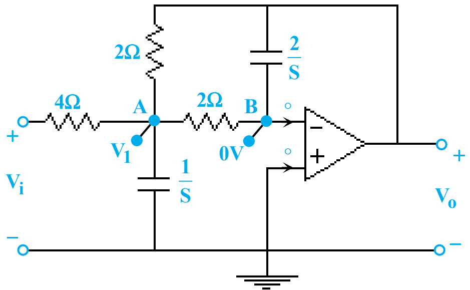
۱) بالاگذر

۲) پایین‌گذر

۳) میان‌گذر

۴) میان‌نگذر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای تشخیص نوع رفتار مدار به لحاظ پاسخ فرکانسی، نیاز داریم که تابع تبدیل آن را داشته باشیم. مطابق شکل مدار را در فضای S مدل نموده و با علم به مشخصات فنی آپ‌امپ‌های ایده‌آل، جریان شاخه‌ها و ولتاژ گره‌ها را معین می‌کنیم. با نوشتن روابط KCL در گره‌های A و B داریم:



$$KCL\,B:\frac{V_۱-۰}{۲}=\frac{۰-V_o}{\frac{۲}{S}}\Rightarrow V_۱=-SV_o\qquad(۱)$$

$$KCL\,A:\frac{V_۱-V_i}{۴}+\frac{V_۱}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_۱-۰}{۲}+\frac{V_۱-V_o}{۲}=۰\Rightarrow-\frac{V_i}{۴}-\frac{V_o}{۲}+(S+\frac{۵}{۴})V_۱=۰$$

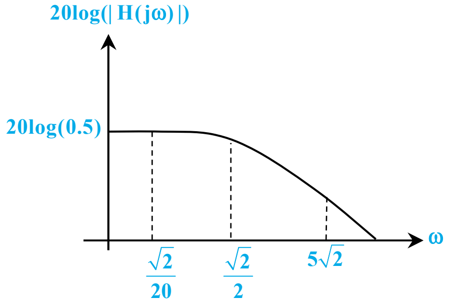
$$\xrightarrow{(۱)}-\frac{V_i}{۴}-\frac{V_o}{۲}-S(S+\frac{۵}{۴})V_o=۰$$

$$\Rightarrow H(S)=\frac{V_o}{V_i}=-\frac{۰/۲۵}{S^۲+۱/۲۵S+۰/۵}$$

از درس کنترل خطی می‌دانیم که تابع انتقال بالا، یک تابع انتقال درجه ۲ با پارامترهای مقابل است:

$$\omega_n=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad\zeta=\frac{۱/۲۵}{۲\times\omega_n}=\frac{۱/۲۵}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱/۲۵}{\sqrt{۲}}<۱$$

مقدار ζ کوچکتر از یک اما نزدیک به آن است؛ پس دیاگرام اندازه پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ در فرکانس ω_n فراجهش نداشته و به شکل زیر است:

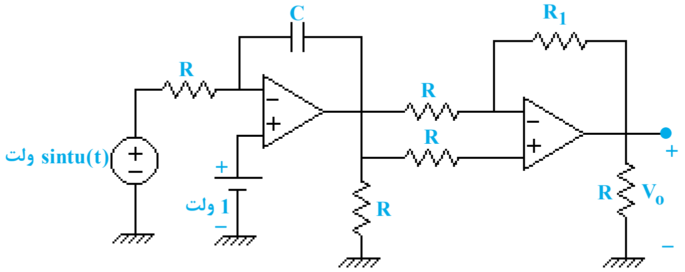


(یادآوری می‌کنیم که دیاگرام اندازه‌ی پاسخ فرکانسی یک تابع انتقال مرتبه ۲ و فاقد صفر، به ازای $\zeta>۰/۷$ فراجهش خواهد داشت) مطابق شکل ترسیم شده مسلماً $H(j\omega)$ یک فیلتر پایین‌گذر بوده و مدار مانند یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند.

مثال۶۱: در مدار زیر ولتاژ خروجی $V_0(t)$ برای $t \geq ۰$ چند ولت است؟ تقویت‌کننده‌های عملیاتی را ایدئال فرض کنید.

$V_C(۰)=۰\ ,\ C=۱۰۰۰\mu F\ ,\ R_۱=۵k\Omega\ ,\ R=۱k\Omega$

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- سراسری ۹۵)



۱) $-۱+t+\cos t$

۲) صفر

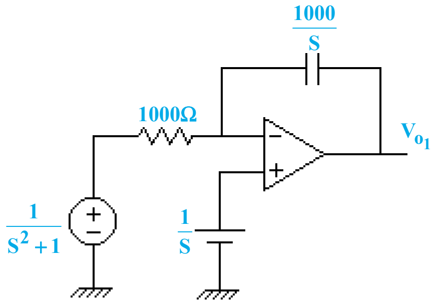
۳) $t+\cos t$

۴) $-۵+۵t+۵\cos t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این تست با یک مدار تقویت‌کننده دوطبقه مواجه هستیم. با توجه به این که طبقه دوم اثر بارگذاری بر طبقه اول ندارد، می‌توانیم هر طبقه را جداگانه تحلیل کنیم.

ابتدا با تحلیل طبقه اول، ولتاژ خروجی این طبقه را با استفاده از جمع آثار محاسبه می‌کنیم.

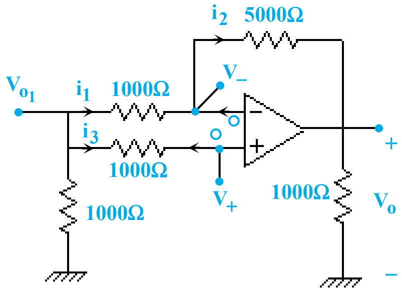
بدین منظور می‌توانیم از روابطی که از قبل می‌دانیم، استفاده کنیم:



$$V_{o_۱}=-\frac{\frac{۱۰۰۰}{S}}{۱۰۰۰}\times\frac{۱}{S^۲+۱}+(۱+\frac{\frac{۱۰۰۰}{S}}{۱۰۰۰})\times\frac{۱}{S}$$

$$\Rightarrow V_{o_۱}=-\frac{۱}{S(S^۲+۱)}+\frac{۱}{S}+\frac{۱}{S^۲}=\frac{S}{S^۲+۱}+\frac{۱}{S^۲}\Rightarrow V_{o_۱}(t)=\cos t+t$$

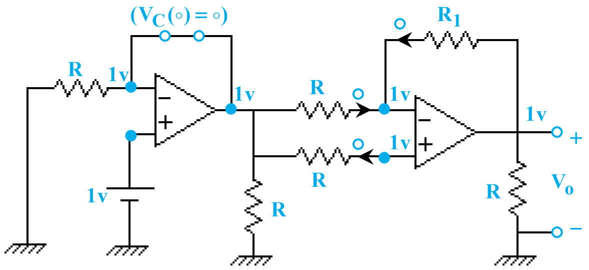
ولتاژ خروجی طبقه دوم را نیز با توجه به مشخصات فنی آپامپ می‌توان به‌راحتی به‌دست آورد:



$$i_۳=۰\Rightarrow V_+=V_{o_۱}\Rightarrow V_-=V_{o_۱}\Rightarrow i_۱=\frac{V_{o_۱}-V_-}{۱۰۰۰}=۰\Rightarrow i_۲=۰$$

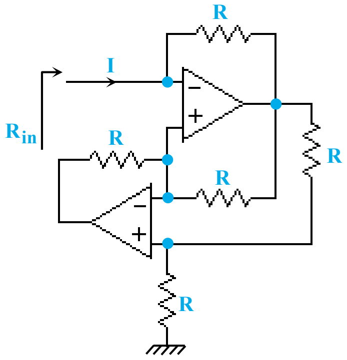
$$\Rightarrow V_o=V_-=V_{o_۱}=\cos t+t$$

پاسخ این سؤال در کلید سنجش گزینه (۱) است؛ اما می‌توان به راحتی نشان داد که این گزینه نمی‌تواند پاسخ تست باشد. برای این کار مقدار ولتاژ خروجی را در $t=۰$ مطابق شکل مقابل محاسبه می‌کنیم. با توجه به شکل مقابل مقدار این ولتاژ برابر ۱ ولت است و تنها گزینه (۳) چنین شرطی را برآورده می‌کند.



مثال۶۲: در مدار شکل مقابل اگر تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل فرض شوند، مقاومت معادل دیده شده از ورودی کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



۱) $-R$

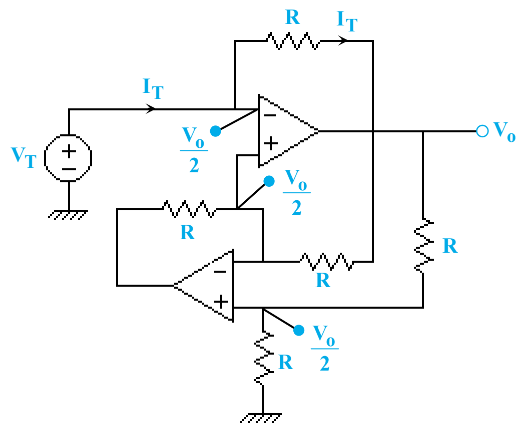
۲) R

۳) $-۲R$

۴) $۲R$

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در ورودی منبع V_T را متصل کرده و رابطه I_T با V_T را اندازه‌گیری می‌کنیم. با توجه به برابری ولتاژ ورودی‌های مثبت و منفی آپ‌امپها داریم:

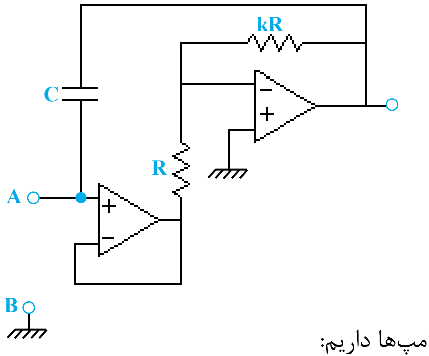


$$V_T = \frac{V_o}{۲} \Rightarrow V_o = ۲V_T \quad و \quad I_T = \frac{V_T - V_o}{R}$$

$$\Rightarrow I_T = \frac{V_T - ۲V_T}{R} \Rightarrow \mathbf{R_{eq} = \frac{V_T}{I_T} = -R}$$

مثال ۶۳: در مدار شکل مقابل، ظرفیت خازن دیده شده از سرهای A و B کدام است؟ (تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل فرض می‌شوند.)

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



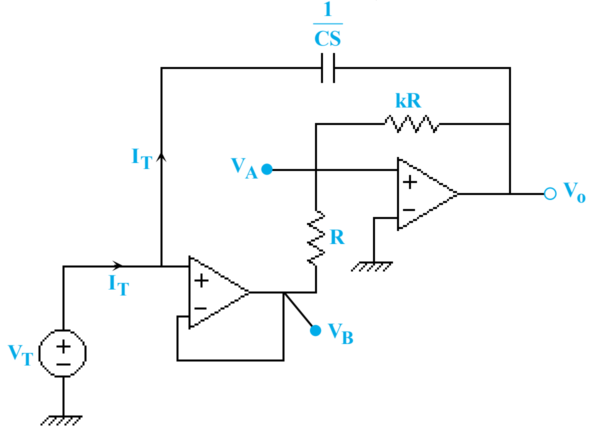
۱) kC

۲) $\frac{k+۱}{k}C$

۳) $(k+۱)C$

۴) $\frac{۱}{k}C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و با توجه به برابری ولتاژ پایه‌های ورودی آپ‌امپها داریم:



$$V_A = ۰ \quad و \quad V_B = V_T$$

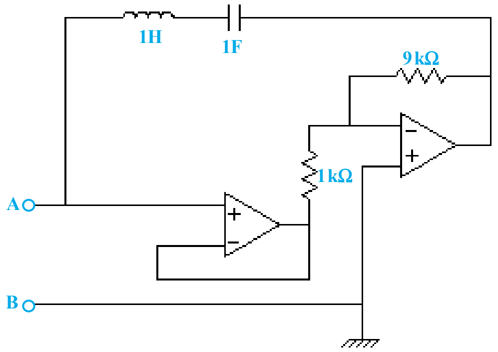
$$\Rightarrow V_o = V_B[\frac{-kR}{R}] \Rightarrow V_o = V_T[-\frac{kR}{R}]$$

$$\Rightarrow V_o = -kV_T \Rightarrow I_T = \frac{V_T - V_o}{\frac{۱}{CS}} = \frac{V_T - (-kV_T)}{\frac{۱}{CS}}$$

$$\Rightarrow I_T = CSV_T(k+۱) \Rightarrow \frac{V_T}{I_T} = \frac{۱}{C(k+۱)S} \Rightarrow \mathbf{C_{eq} = C(k+۱)}$$

مثال ۶۴: در مدار زیر مدار معادل دیده شده در سرهای A و B، اتصال سری یک خازن با ظرفیت .... فاراد و یک سلف با اندوکتانس .... هانری است. تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل و ولتاژ اولیه خازن، صفر ولت می‌باشد.

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



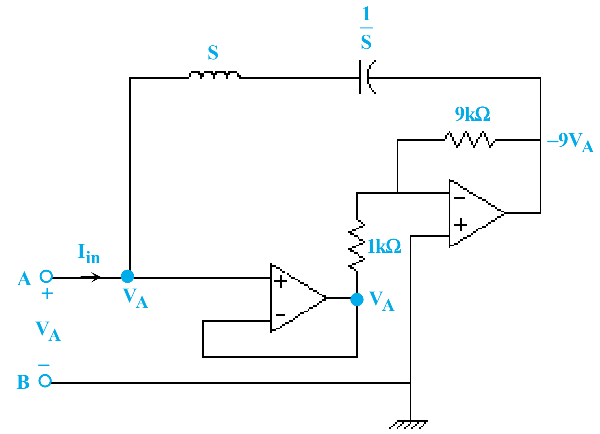
۱) ۰/۱، ۱

۲) ۱، ۱

۳) ۰/۱، ۱۰

۴) ۱۰، ۱۰

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا به محاسبه امپدانس دیده شده از دو سر A و B می‌پردازیم. بدین منظور مدار را به حوزه لاپلاس برده و با توجه به خواص تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل، ولتاژ و جریان شاخه‌های مختلف مدار را مطابق شکل روبرو مشخص می‌کنیم:

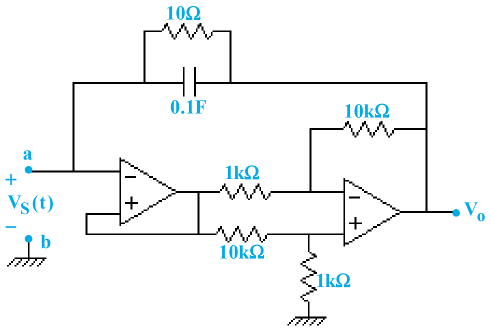
دقت کنید که قسمت سمت راست مدار یک منفی‌ساز با بهره ولتاژ ۹- می‌باشد.

حال باید نسبت $Z=\frac{V_A}{I_{in}}$ را بدست آوریم و از روی آن مقدار سلف و خازن معادل را بدست آوریم. با نوشتن KVL در حلقه بیرونی مدار داریم:

$$V_A-\left(S+\frac{۱}{S}\right)I_{in}=-۹V_A \Rightarrow V_A=\frac{۱}{۱۰}\left(S+\frac{۱}{S}\right)I_{in} \Rightarrow Z=\frac{V_A}{I_{in}}=\frac{S}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰S}=LS+\frac{۱}{CS} \Rightarrow \begin{cases}L=۰/۱H\\C=۱۰F\end{cases}$$

مثال۶۵: در مدار زیر، مدار معادل دیده شده از سرهای a و b در حالت دائمی سینوسی برای ورودی $V_S(t)=۱۰\sin t$، برابر کدام است؟ تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل هستند.

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)

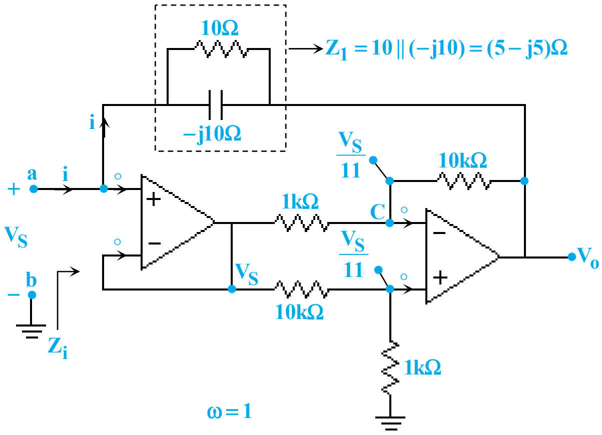


۱) اتصال سری یک مقاومت ۰/۵ اهم و یک خازن ۲ فاراد

۲) اتصال موازی یک مقاومت ۱۰ اهم و یک خازن ۱ فاراد

۳) اتصال سری یک مقاومت ۱۰ اهم و یک خازن ۰/۱ فاراد

۴) اتصال موازی یک مقاومت ۱ اهم و یک خازن ۰/۵ فاراد

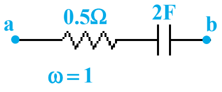


☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مطابق شکل مقابل با علم به این که ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی آپ‌امپ‌ها یکی است، ولتاژ نقاط مختلف مدار را برحسب V_S نوشته و سعی می‌کنیم با نوشتن رابطه KCL در گره C، V_o و در نهایت i را برحسب V_S به دست آوریم تا بتوانیم امپدانس ورودی مدار از دید a و b را محاسبه کنیم:

$$KCL\,C:\frac{V_S-\frac{V_S}{۱۱}}{۱۰۰۰}=\frac{\frac{V_S}{۱۱}-V_o}{۱۰۰۰۰}\xrightarrow{\times ۱۱۰۰۰۰}۹۹V_S=-۱۱V_o \Rightarrow V_o=-۹V_S$$

$$KVL\,(\text{حلقه بیرونی}):V_S=V_o+Z_i i=-۹V_S+(۵-j۵)i \Rightarrow ۱۰V_S=(۵-j۵)i \Rightarrow Z_i=(۰/۵-j۰/۵)\Omega$$

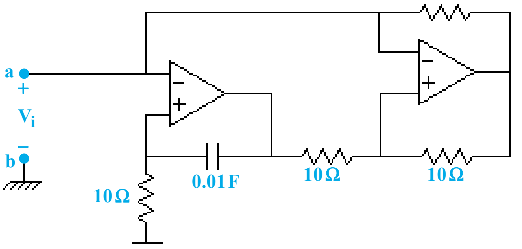
از مقدار Z_i در رابطه فوق مشخص است که مدار از دید a و b همچون اتصال سری یک مقاومت ۰/۵ اهم و یک خازن ۲ فارادی عمل می‌کند:



$$\rightarrow Z_{ab}=۰/۵+\frac{۱}{j\times ۲\times ۱}=(۰/۵-j۰/۵)\Omega=Z_i$$

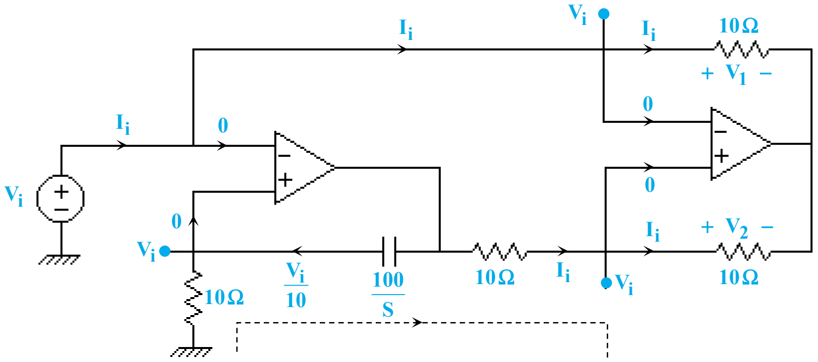
مثال ۶۶: **در مدار زیر، تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل می‌باشند. سلف معادل در سرهای a و b چند هانری است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



۱) ۰/۱
۲) ۰/۰۱
۳) ۱
۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن سلف معادل، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و سپس ارتباط V_i با I_i را محاسبه کنیم. دقت کنید که در تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل، جریان ورودی پایه‌های مثبت و منفی صفر است و همچنین در صورت وجود فیدبک منفی، ولتاژ پایه‌های ورودی مثبت و منفی با هم برابر است.



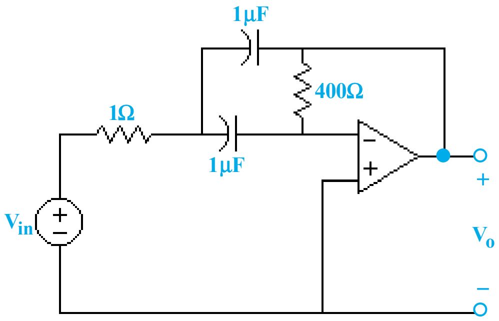
لازم به ذکر است که به علت وجود فیدبک منفی در آپامپ سمت راست، ولتاژهای $V_۱$ و $V_۲$ با هم برابر است. $V_۱ = ۱۰ I_۱ = V_۲$

بنابراین جریان مقاومت ۱۰Ω موجود در حلقه فیدبک منفی آپامپ سمت راست نیز برابر با I_i است. همچنین ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی ورودی آپامپ سمت چپ نیز هر دو برابر با V_i است. حال با نوشتن KVL در مسیر مشخص شده داریم: $-V_i - \frac{V_i}{۱۰} \times \frac{۱۰۰}{S} + ۱۰ I_i + V_i = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i}{I_i} = Z_{in} = S$

بنابراین مدار، معادل با یک سلف ۱ هانری می‌باشد.

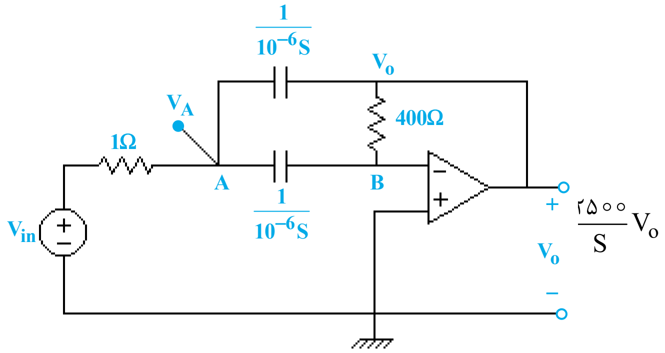
مثال ۶۷: **فرکانس تشدید تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_{in}}$ برای مدار زیر چند رادیان بر ثانیه است؟ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل می‌باشد.**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



۱) $۱۰۰\sqrt{۵}$
۲) ۵×۱۰^۴
۳) ۲۵۰۰
۴) $۲۵۰۰\sqrt{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا تابع $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_{in}}$ را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور شکل مدار را به صورت مقابل در حوزه S در نظر گرفته، در گره B، KCL می‌زنیم:



و حالا در گره A:

$$\frac{V_A - V_{in}}{۱} + \frac{V_A}{\frac{۱}{۱۰^{-۶} S}} + \frac{V_A - V_o}{\frac{۱}{۱۰^{-۶} S}} = ۰ \Rightarrow (۱ + ۲ \times ۱۰^{-۶} S) V_A - V_{in} - ۱۰^{-۶} S V_o = ۰$$

$$-(۱ + ۲ \times ۱۰^{-۶} S) \frac{۲۵۰۰}{S} V_o - V_{in} - ۱۰^{-۶} S V_o = ۰ \Rightarrow -\frac{۱۰^{-۶} S^۲ + ۵ \times ۱۰^{-۳} S + ۲۵۰۰}{S} V_o = V_{in} \xrightarrow{(۱)}$$

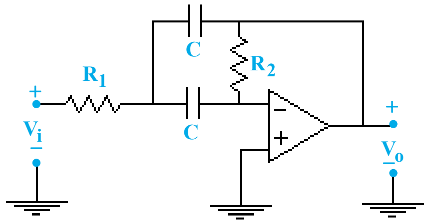
$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}}(S)=-\frac{۱۰^۶\,S}{S^۲+۵\times۱۰^۳\,S+۲۵\times۱۰^۸}\Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega)=-\frac{۱۰^۶\,j\omega}{۵\times۱۰^۳\,j\omega+۲۵\times۱۰^۸-\omega^۲}$$

حال باید مقدار موهومی تابع انتقال $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ برابر صفر شود و یا به بیان دیگر $H(j\omega)$ حقیقی باشد:

$$\text{Im}\left\{\frac{V_o}{V_{in}}(j\omega)\right\}=۰\Rightarrow ۲۵\times۱۰^۸-\omega^۲=۰\Rightarrow \omega=۵\times۱۰^۴\ \frac{rad}{sec}$$

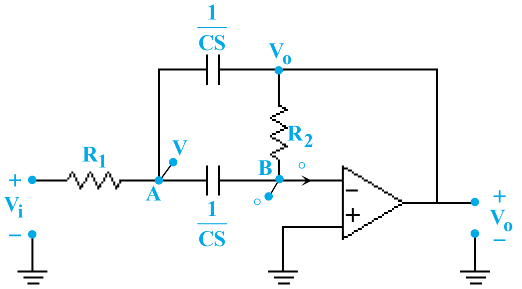
مثال ۶۸: **در مدار زیر، فرکانس زاویه‌ای تشدید ω_o تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_i}$ چند رادیان بر ثانیه است؟** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- سراسری ۹۶)

($R_۱=۱\Omega$ ، $R_۲=۱۰۰\Omega$ ، $C=۱\mu F$ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل است)



۱) ۵×۱۰^۳
۲) $۱۰^۴$
۳) ۵×۱۰^۴
۴) $۱۰^۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در گام اول تابع انتقال $H(S)=\frac{V_o}{V_i}$ را به دست می‌آوریم. جهت ساده‌ترکردن محاسبات تابع انتقال را در فضای S و به صورت پارامتری محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$\text{KCL B}:\frac{V-۰}{\frac{۱}{CS}}=\frac{۰-V_o}{R_۲}\Rightarrow CSV=-\frac{V_o}{R_۲}\Rightarrow V=-\frac{V_o}{CR_۲S}\qquad(۱)$$

$$\text{KCL A}:\frac{V_i-V}{R_۱}=\frac{V-V_o}{\frac{۱}{CS}}+\frac{V-۰}{\frac{۱}{CS}}=۲CSV-CSV_o\xrightarrow{\times R_۱}$$

$$V_i=(۱+۲CR_۱S)V-CR_۱SV_o\xrightarrow{(۱)}V_i=\left(\frac{-۱}{CR_۲S}-\frac{۲R_۱}{R_۲C}-CR_۱S\right)V_o$$

$$\Rightarrow V_i=-\frac{C^۲R_۱R_۲S^۲+۲R_۱CS+۱}{CR_۲S}V_o\Rightarrow\frac{V_o}{V_i}=-\frac{\frac{S}{CR_۱}}{S^۲+\frac{۲}{R_۲C}S+\frac{۱}{C^۲R_۱R_۲}}$$

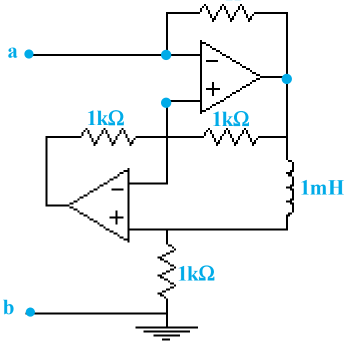
در فرکانس زاویه‌ای تشدید یک تابع شبکه، آن تابع شبکه حقیقی محض است؛ لذا با جایگزینی $j\omega$ به جای S باید $\frac{V_o}{V_i}$ حقیقی شود:

$$\frac{V_o}{V_i}(j\omega)=\frac{-\frac{j\omega}{CR_۱}}{\left[\frac{۱}{C^۲R_۱R_۲}-\omega^۲\right]+\frac{۲j\omega}{R_۲C}}$$

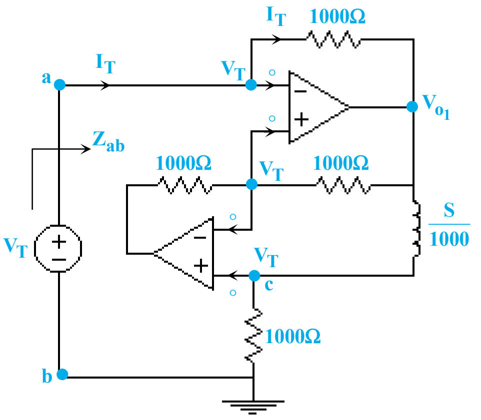
$$I_m\left\{\frac{V_o}{V_i}(j\omega)\right\}=۰\Rightarrow\frac{۱}{C^۲R_۱R_۲}-\omega^۲=۰\Rightarrow\omega=\frac{۱}{C\sqrt{R_۱R_۲}}=\frac{۱}{۱۰^{-۶}\times\sqrt{۱۰۰}}=۱۰^۵\ \frac{rad}{sec}$$

مثال ۶۹: **در مدار زیر، تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل هستند. مدار معادل دیده شده از سرهای a و b کدام است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۷)



۱) خازن با ظرفیت ۱μF
۲) خازن با ظرفیت $-۱nF$
۳) سلف با اندوکتانس $-۱mH$
۴) سلف با اندوکتانس ۱μH



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در یک آپ امپ ایده‌آل جریان پایه‌های ورودی آپ امپ صفر بوده و اگر فیدبک منفی در مدار آپ امپ برقرار باشد، ولتاژ پایه‌های ورودی یکسان است. با در نظر گرفتن این نکات، مدار را در فضای S مدل کرده و ولتاژ و جریان شاخه‌های مختلف را به‌دست می‌آوریم. قبل از آن منبع ولتاژ تست V_T را برای محاسبه‌ی امپدانس معادل مدار، در دو سر a و b قرار می‌دهیم:

با توجه به شکل داریم:

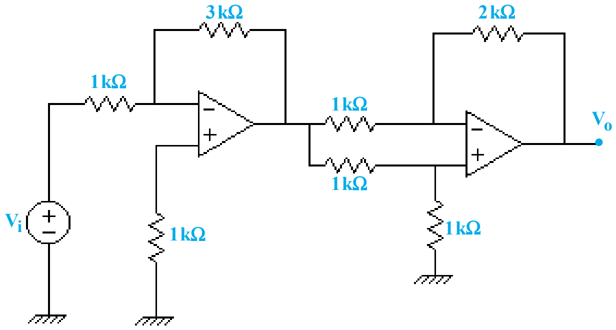
$$V_{o_۱} = V_T - ۱۰۰۰ \times I_T \qquad (۱)$$

$$\text{KCL c}: \frac{V_T}{۱۰۰۰} + \frac{V_T - V_{o_۱}}{\frac{S}{۱۰۰۰}} = ۰ \xrightarrow{(۱)} \frac{V_T}{۱۰۰۰} + \frac{V_T - V_T + ۱۰۰۰ I_T}{\frac{S}{۱۰۰۰}} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{V_T}{۱۰۰۰} + \frac{۱۰^۶ I_T}{S} = ۰ \Rightarrow \frac{V_T}{I_T} = -\frac{۱۰^۹}{S} = -\frac{۱}{۱۰^{-۹} S} \Rightarrow Z_{ab} = \frac{۱}{-۱۰^{-۹} S}$$

با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده برای Z_{ab}، مدار از دو سر a و b همچون خازنی با ظرفیت $-۱۰^{-۹}$ فاراد یا منفی یک نانوفاراد عمل می‌کند. دقت در این نکته ضروری است که جریان مقاومت ۱۰۰۰ اهمی در پایین مدار لزوماً برابر I_T نمی‌باشد چرا که سر پایین این مقاومت به زمین مدار متصل می‌باشد و آپ‌امپ‌های موجود در مدار نیز از طریق تغذیه‌های خود که معمولاً ترسیم نمی‌شوند، به این نقطه متصل هستند و جریان پایه‌ی خروجی آن‌ها به این نقطه سرازیر می‌شود.

مثال ۷۰: در مدار زیر تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل هستند. اگر ولتاژ اشباع تقویت‌کننده‌های عملیاتی برابر ۱۲± ولت باشد، حدود تغییرات V_i برای این‌که هیچ‌کدام از تقویت‌کننده‌های عملیاتی به اشباع نروند، برحسب ولت، کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)

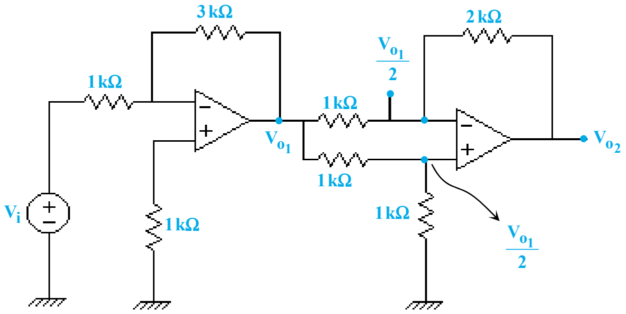


۱) $-۸ < V_i < +۸$

۲) $-۲ < V_i < +۲$

۳) $-۲۴ < V_i < +۲۴$

۴) $-۴ < V_i < +۴$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تقویت‌کننده‌های عملیاتی زمانی به اشباع می‌روند که ولتاژ خروجی آنها برابر ولتاژ تغذیه مثبت و یا ولتاژ تغذیه منفیشان شود. بنابراین برای بررسی شرایط به اشباع رفتن تقویت‌کننده‌ها باید در وهله‌ی اول ولتاژ خروجی آنها را محاسبه کنیم.

ولتاژ خروجی تقویت‌کننده اول در سمت چپ با توجه به این که این قسمت از مدار یک منفی‌ساز است، برابر است با:

$$V_{o_۱} = -\frac{۳k}{۱k} \times V_i = -۳V_i$$

ولتاژ خروجی تقویت‌کننده دوم با توجه به شکل بالا با نوشتن KVL بدست می‌آید:

$$V_{o_۱} = V_{o_۲} + (۱k + ۲k) \times \frac{V_{o_۱} - \frac{۱}{۲} V_{o_۱}}{۱k} \Rightarrow V_{o_۲} = -\frac{۱}{۲} V_{o_۱} = \frac{۳}{۲} V_i$$

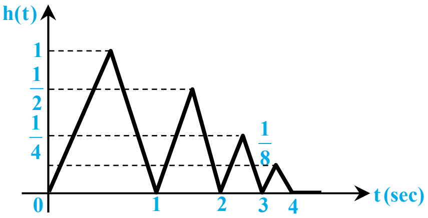
حال شرایطی که در آن تقویت‌کننده‌ها خارج از اشباع هستند را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} -۱۲ < V_{o_۱} < ۱۲ \Rightarrow -۱۲ < -۳V_i < ۱۲ \Rightarrow -۴ < V_i < ۴ \\ -۱۲ < V_{o_۲} < ۱۲ \Rightarrow -۱۲ < \frac{۳}{۲} V_i < ۱۲ \Rightarrow -۸ < V_i < ۸ \end{cases}$$

از آنجایی که نمی‌خواهیم هیچ‌یک از تقویت‌کننده‌ها به اشباع برود، از شروط فوق اشتراک می‌گیریم؛ بنابراین محدوده تغییرات مجاز V_i به صورت $-۴ < V_{in} < ۴$ خواهد بود.

مثال۷۱: **در یک مدار الکتریکی خطی مستقل از زمان، پاسخ ضربه واحد به صورت زیر است. مقدار نهایی پاسخ پله با دامنه دو کدام است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)



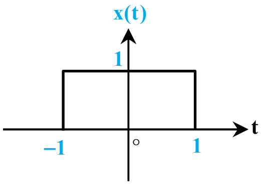
۱) $\frac{۷}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۱}{۱۶}$
۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۴) $\frac{۳۰}{۱۶}$

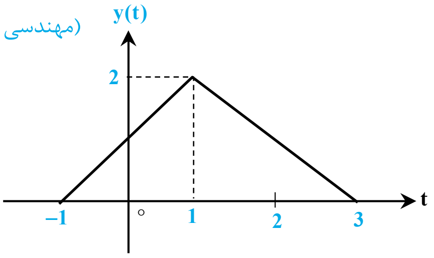
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقدار نهایی پاسخ پله با استفاده از انتگرال کانولوشن، برابر با حاصلضرب عدد ۲ در مساحت مثلث‌های موجود می‌باشد.

$$y=۲\times[\frac{۱\times۱}{۲}+\frac{۱\times\frac{۱}{۲}}{۲}+\frac{۱\times\frac{۱}{۴}}{۲}+\frac{۱\times\frac{۱}{۸}}{۲}] \Rightarrow y=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}=\frac{۸+۴+۲+۱}{۸}=\frac{۱۵}{۸}=\frac{۳۰}{۱۶}$$

مثال۷۲: **در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، برای ورودی $x(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t)$ به دست می‌آید. پاسخ این مدار به ورودی $x(t)=\sin t u(t)$ در $t=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)

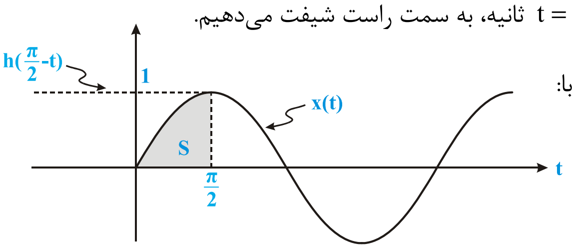




۱) ۰
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سیگنال $x(t)$ را می‌توان به شکل $x(t)=u(t+۱)-u(t-۱)$ و سیگنال $y(t)$ را می‌توان به شکل $y(t)=r(t+۱)-r(t-۱)$ بیان کرد. با توجه به LTI بودن مدار، مشخص است که پاسخ پله این مدار به صورت $g(t)=r(t)$ بوده و پاسخ ضربه آن برابر است با: $h(t)=\frac{dg(t)}{dt}=u(t)$

حال برای محاسبه پاسخ مدار به ورودی $x(t)=\sin tu(t)$ در لحظه $t=\frac{\pi}{۲}$ ثانیه، می‌توان از تکنیک بصریِ کانولوشن استفاده کرد. مطابق شکل زیر سیگنال $x(t)$ را ثابت نگه داشته و سیگنال $h(t)$ را پس از دوران حول محور t، به اندازه $t=\frac{\pi}{۲}$ ثانیه، به سمت راست شیفت می‌دهیم.

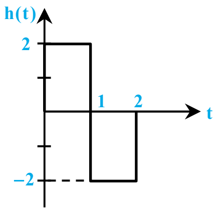


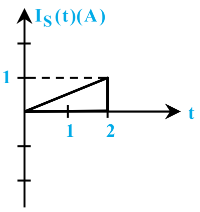
مساحت قسمت هاشورخورده برابر پاسخ مدار در $t=\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. این مساحت برابر است با:

$$S=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin t\,dt=-\cos t\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=۰+۱=۱ \quad , \quad y(t=\frac{\pi}{۲})=S\times۱=۱$$

مثال۷۳: **پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی $I_S(t)$ مداری به شکل زیر است. پاسخ حالت صفر این مدار در زمان (ثانیه $t=۲/۵$) چقدر است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)





۱) $-۰/۲۵$
۲) $-۰/۱۲۵$
۳) $۰/۲۵$
۴) $۰/۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** برای بدست آوردن لاپلاس پاسخ حالت صفر به ورودی $I_S(t)$، ابتدا از $I_S(t)$ لاپلاس گرفته و در لاپلاس تابع $h(t)$ یا همان پاسخ ضربه، ضرب می‌کنیم. $h(t)=۲u(t)-۴u(t-۱)+۲u(t-۲)$

$$I_S(t)=\frac{۱}{۲}t[u(t)-u(t-۲)]=\frac{۱}{۲}tu(t)-\frac{۱}{۲}tu(t-۲)$$

$$\Rightarrow I_S(t)=\frac{۱}{۲}tu(t)-\frac{۱}{۲}(t-۲+۲)u(t-۲) \Rightarrow I_S(t)=\frac{۱}{۲}tu(t)-\frac{۱}{۲}(t-۲)u(t-۲)-u(t-۲)$$

حال لاپلاس $I_S(t)$ و $h(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L[h(t)]=\frac{۲}{S}-\frac{۴e^{-S}}{S}+\frac{۲e^{-۲S}}{S} \quad , \quad L[I_S(t)]=\frac{۱}{۲S^۲}-\frac{۱\times e^{-۲S}}{۲S^۲}-\frac{e^{-۲S}}{S}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

$$L(y(t))=L[h(t)]\times L[I_S(t)]\ \Rightarrow L(y(t))=[\frac{۲}{S}-\frac{۴e^{-S}}{S}+\frac{۲e^{-۲S}}{S}]\times[\frac{۱}{۲S^۲}-\frac{e^{-۲S}}{۲S^۲}-\frac{e^{-۲S}}{S}]$$

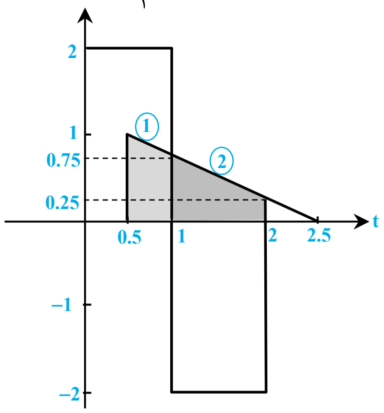
$$\Rightarrow\quad L(y(t))=\frac{۱}{S^۳}-\frac{۲e^{۲S}}{S^۲}-\frac{۲e^{-S}}{S^۳}+\frac{۲e^{-۳S}}{S^۳}+\frac{۴e^{-۳S}}{S^۲}-\frac{e^{-۴S}}{S^۳}-\frac{۲e^{-۴S}}{S^۲}$$

در ادامه از تابع $L[y(t)]$، لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$y(t)=\frac{۱}{۲}t^۲u(t)-۲(t-۲)u(t-۲)-(t-۱)^۲u(t-۱)+(t-۳)^۲u(t-۳)+۴(t-۳)u(t-۳)-\frac{۱}{۲}(t-۴)^۲u(t-۴)-۲(t-۴)u(t-۴)$$

$$y(t=۲/۵)=\frac{۱}{۲}\times(۲/۵)^۲-۲(۲/۵-۲)-(۲/۵-۱)^۲+۰+۰+۰+۰\quad\Rightarrow\quad y(t=۲/۵)=-۰/۱۲۵$$

روش دوم: با استفاده از تکنیک کانولوشن می‌توان گفت که $y(t=۲/۵)$، ۲ برابر اختلاف مساحت سطوح ۱ و ۲ در شکل مقابل است:

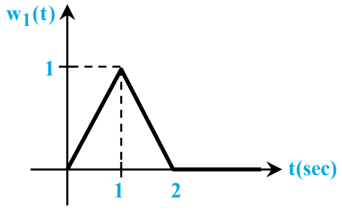


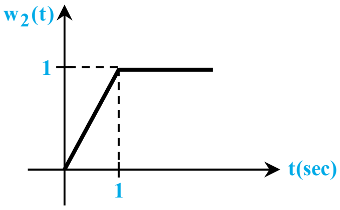
$$S_۱=\frac{۱+۰/۵}{۲}\times\frac{۱}{۲}=۰/۴۳۷۵$$

$$S_۲=\frac{۰/۲۵+۰/۷۵}{۲}\times۱=۰/۵$$

$$y(t=۲/۵)=۲(S_۱-S_۲)=-۰/۱۲۵$$

مثال ۷۴: **در یک مدار LTI پاسخ به ورودی $w_۱(t)$ برابر $y_۱(t)=\delta(t)$ می‌باشد. پاسخ به ورودی $w_۲(t)$ که به صورت $y_۲(t)$ می‌باشد، مطابق با کدامیک از گزینه‌های زیر است؟** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)





۱) $y_۲(t)=\delta(t)+\delta(t-۱)+\delta(t-۲)+\delta(t-۳)+\cdots$

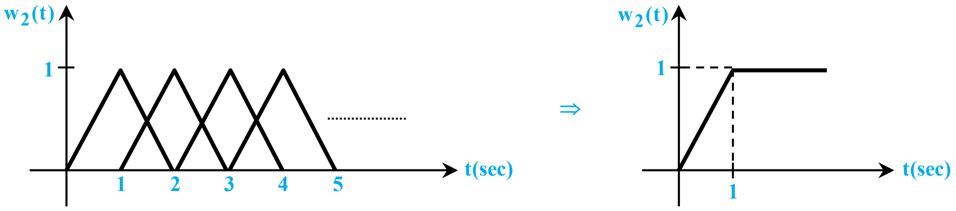
۲) $y_۲(t)=\delta(t)-\delta(t-۱)+\delta(t-۲)-\delta(t-۳)+\cdots$

۳) $y_۲(t)=u(t)+u(t-۱)+u(t-۲)+u(t-۳)+\cdots$

۴) $y_۲(t)=u(t)-u(t-۱)+u(t-۲)-u(t-۳)+\cdots$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا دقت کنید که می‌توان تابع $w_۲(t)$ را بر حسب $w_۱(t)$ به صورت زیر نوشت:

$$w_۲(t)=w_۱(t)+w_۱(t-۱)+w_۱(t-۲)+w_۲(t-۳)+\cdots$$



حال اگر پاسخ مدار به $w_۱(t)$ به صورت $\delta(t)$ باشد، پاسخ مدار به $w_۲(t)$ به صورت مقابل است: $\delta(t)+\delta(t-۱)+\delta(t-۲)+\cdots=$ پاسخ مدار به $w_۲(t)$

مثال ۷۵: **برای آنکه در مداری پاسخ مدار تابع خطی از تحریک ورودی باشد، بایستی مدار چگونه باشد؟** (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)

۱) تغییرناپذیر با زمان با حالت اولیه صفر

۲) خطی و تغییرپذیر با زمان

۳) خطی با حالت اولیه صفر

۴) خطی و تغییرناپذیر با زمان

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای آن که پاسخ یک مدار یا $y(t)$، تابع خطی از تحریک ورودی مدار یا $u(t)$ باشد، که در حوزه زمان با رابطه $y(t)=\int_۰^t h(t,\tau)u(\tau)d\tau$ تعبیر می‌شود ($h(t)$ پاسخ ضربه مدار است)، باید مدار خطی با شرایط اولیه صفر باشد. اگر شرایط اولیه مدار غیرصفر باشد، رابطه فوق به شکل $y(t)=\int_۰^t h(t,\tau)u(\tau)d\tau+g(t)$ تغییر می‌کند که $g(t)$ نشأت گرفته از شرایط اولیه است؛ در رابطه جدید وابستگی خطی میان u و y از بین رفته است. از طرفی دقت کنید که تغییرپذیر یا ناپذیر با زمان بودن مدار، تأثیری در رابطه خطی میان ورودی و خروجی آن ندارد. در رابطه اول، حالت کلی مدار در نظر گرفته شد؛ اگر مدار تغییرناپذیر با زمان باشد، رابطه به شکل مقابل ساده می‌گردد: $y(t)=\int_۰^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$

می‌بینیم که در این حالت نیز رابطه خطی میان u و y حفظ می‌شود.

www.modaresanesharif.ac.ir