مهرپویا مهراس

دفترچه سؤالات

دروس تخصصی

ریاضیات «ریاضی عمومی (۱ و ۲) معادلات دیفرانسیل ریاضی مهندسی»

۳۱ـ در مورد تابع $f(x)=\begin{vmatrix} x^{۴} & x^{۳} & ۱ \\ x & -e^{-x} & ۰ \\ e^{۲x} & x^{۲} & ۰ \end{vmatrix}$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) تابع f دارای ماکزیمم یا مینیمم نیست.
۲) تابع f اکیداً صعودی است.
۳) حد عبارت $\frac{۶(f(x)-\cosh x - x)-۷x^{۳}}{x^{۵}}$ در $x\to ۰$ برابر با $\frac{۱}{۲۰}$ است.
۴) تابع f دارای نقطه عطف نیست.

۳۲ـ فرض کنید n یک عدد صحیح باشد که بر ۳ بخش‌پذیر نیست. در این صورت با فرض $z=-۱+i\sqrt{۳}$، حاصل $z^{۲n}+۲^{n}z^{n}+۲^{۲n}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $۲^{n}-۲$ ۴) ۱

۳۳ـ حاصل سری $S=\sum_{n=۱}^{\infty} n^{۳}x^{n}$ کدام است؟ $(|x|<۱)$

۱) $\frac{x-۴x^{۲}+x^{۳}}{(۱-x)^{۴}}$ ۲) $\frac{x^{۲}-۴x+۱}{(۱-x)^{۳}}$ ۳) $\frac{x+۴x^{۲}+x^{۳}}{(۱-x)^{۴}}$ ۴) $\frac{x^{۲}+۴x+۱}{(۱-x)^{۳}}$

۳۴ـ فرض کنیم که $A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱^{۳}+۳^{۳}+۵^{۳}+...+(۲n-۱)^{۳}}{n(۱^{۲}+۲^{۲}+...+n^{۲})}$ و $B=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^{۴}+۱}}+\frac{n}{\sqrt{n^{۴}+۲}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^{۴}+n}}$ باشد. دراین صورت حاصل حدود A و B کدام است؟

۱) $A=۶$, $B=۲$ ۲) $A=\frac{۲}{۳}$, $B=۱$ ۳) $A=\frac{۲}{۳}$, $B=۲$ ۴) $A=۶$, $B=۱$

۳۵ـ حاصل انتگرال $I=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{(۱+x^{۲})Ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}})}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{Ln(۱+\sqrt{۲})}$ ۲) $\sqrt{Ln(۱+\sqrt{۲})}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{Ln(۱+\sqrt{۲})}$ ۴) $۴\sqrt{Ln(۱+\sqrt{۲})}$

۳۶ـ حاصل انتگرال $I=\iint_{S}curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ چنانچه S سطح رویه $۳x^{۲}+۳y^{۲}+۳(z-۲)^{۲}=۱۵$ $(z\geq ۰)$ با بردار قائم برونسو باشد و نیز $\vec{F}(x,y,z)=(x^{۲}e^{z}-۲y^{۳}\cos(xz))\vec{i}+۲x^{۳}e^{z}\vec{j}+e^{xz}\sin(y^{۲}z)\vec{k}$ باشد، کدام است؟

۱) ۳π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۶π

۳۷ـ فرض کنید که C لبه ناحیه‌ای بسته، هموار و ساده به معادله $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$ باشد. در این صورت حاصل انتگرال $I=\oint_{C}\frac{-ydx+xdy}{۴x^{۲}+۹y^{۲}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) ۲π

۳۸ـ اگر T گوی $x^۲+y^۲+z^۲\leq z$ باشد، آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\iiint_T(x^۲+y^۲+z^۲)dv$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{\pi}{۳۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۰}$

۳۹ـ برای تابع $f(x,y)=\frac{x^۲y^۲}{x^۲y^۲+(x-y)^۲}$ اگر $L_۱=\lim\limits_{x\to ۰}[\lim\limits_{y\to ۰}f(x,y)]$، $L_۲=\lim\limits_{y\to ۰}[\lim\limits_{x\to ۰}f(x,y)]$ و $L=\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}f(x,y)$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $L_۱=L_۲=۰$ و L وجود ندارد.

۲) $L=L_۱=L_۲=۰$

۳) $L_۱=۰$، $L_۲=۱$ و L وجود ندارد.

۴) $L_۱=۱$، $L_۲=۰$ و L وجود ندارد.

۴۰ـ حجم جسم سه بعدی که بالای مخروط $\phi=\frac{\pi}{۳}$ و پایین کره $\rho=۴\cos\phi$ قرار دارد، کدام است؟

۱) ۱۰π ۲) ۵π ۳) ۱۶π ۴) ۸π

۴۱ـ در صورتی‌که بدانیم $\begin{cases} xJ'_n(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+۱}(x) \\ xJ'_n(x)=-nJ_n(x)+xJ_{n-۱}(x)\end{cases}$، آنگاه عبارت $x^۲J''_n(x)$ برحسب J_n و $J_{n+۱}$ به کدام صورت است؟

۱) $(n^۲+۲n+x)J_n-xJ_{n+۱}$

۲) $(n^۲-n-x^۲)J_n+xJ_{n+۱}$

۳) $(n-۲x)J_n-xJ_{n+۱}$

۴) $(n^۲+n-x^۲)J_n+xJ_{n+۱}$

۴۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y''+۵xy'+۴y=\frac{۱}{x^۲Ln^۲x}$ کدام است؟

۱) $x^{-۲}Ln(\frac{c_۱x^{c_۲}}{Lnx})$ ۲) $x^{-۲}Ln(\frac{c_۱+c_۲x}{Lnx})$ ۳) $x^۲Ln(\frac{c_۱x^{c_۲}}{Lnx})$ ۴) $x^۲Ln(\frac{c_۱+c_۲x}{Lnx})$

۴۳ـ مقدار جواب معادله $y'+y=\sin x$ با شرط اولیه $y(۰)=\frac{۱}{۲}$ در $x=\pi$ کدام است؟

۱) $e^{-\pi}-\frac{۱}{۲}$ ۲) $e^{\pi}+\frac{۱}{۲}$ ۳) $e^{-\pi}+\frac{۱}{۲}$ ۴) $e^{\pi}-\frac{۱}{۲}$

۴۴ـ جواب عمومی دستگاه $X'=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۱\end{bmatrix}X$، کدام است؟

۱) $\begin{cases} x=(c_۱+c_۲t)e^{۲t} \\ y=(c_۱-c_۲+c_۲t)e^{۲t}\end{cases}$

۲) $\begin{cases} x=(c_۱+c_۲t)e^{۲t} \\ y=(c_۱+c_۲-c_۲t)e^{۲t}\end{cases}$

۳) $\begin{cases} x=c_۱e^t+c_۲e^{-t} \\ y=c_۱e^t-۳c_۲e^{-t}\end{cases}$

۴) $\begin{cases} x=c_۱e^t+c_۲e^{-t} \\ y=-۳c_۱e^t+c_۲e^{-t}\end{cases}$

۴۵ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $y''+۲y'+۲y=\delta(t-\frac{\pi}{۲})(۲+\sin t)$ با شرایط $y(\circ)=۱$ و $y'(\circ)=\circ$ برابر با کدام گزینه است؟

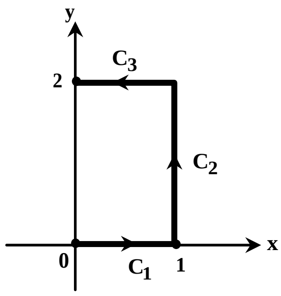
۱) $\frac{s+۲+۳e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^۲+۲s+۲}$
۲) $\frac{s^۲+۲s+e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^۳+۲s^۲+۲s}$
۳) $\frac{(s+۲)e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^۲+۲s^۲+۲}$
۴) $\frac{s+۲+۳e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^۳+۲s^۲+۲s}$

۴۶ـ هرگاه $u(x,t)$ جواب معادله موج ناهمگن زیر باشد، آن‌گاه ارتفاع موج در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۲\pi}{۳}$ و در لحظه $t=۶$ کدام خواهد بود؟

$$\begin{cases}\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}-۴\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}=t\cos x \quad ; \quad -\infty<x<+\infty\ ,\ t>\circ\\ u(x,\circ)=\circ\ ,\ u_t(x,\circ)=-\cos x\end{cases}$$

۱) صفر
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) ۳

۴۷ـ اگر C مسیر متشکل از سه مسیر $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ مطابق شکل زیر باشد، آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\int_C \bar{z}\,dz$ کدام است؟



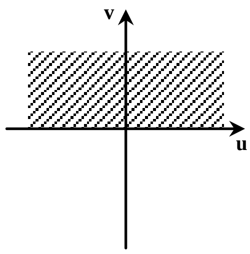
۱) $۴i-۲$
۲) $۴i$
۳) $۴i+۲$
۴) $۲i+۳$

۴۸ـ هرگاه $f(x)=\cos(\alpha x)\ ,\ -\pi<x<\pi$ تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π و α عددی غیرصحیح و سری فوریه تابع f بـه صورت زیر باشد؛ آن‌گاه حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۹n^۲-۱}$ برابر با کدام گزینه است؟

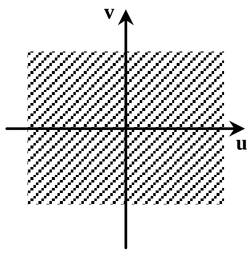
$$f(x)=\frac{۲\alpha}{\pi}\sin(\alpha\pi)[\frac{۱}{۲\alpha^۲}+\frac{\cos x}{۱^۲-\alpha^۲}-\frac{\cos ۲x}{۲^۲-\alpha^۲}+-\cdots]$$

۱) $\frac{۱}{۲}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۸}$
۲) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{۳}{۲}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳۶}$
۴) $\frac{\pi}{۱۸\sqrt{۳}}$

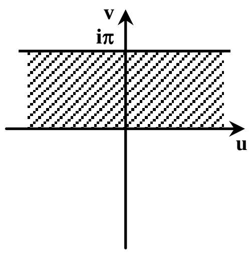
۴۹ـ نگاشت $w=\mathrm{Ln}(۴\cosh^۲ z)$ ناحیه $\mathrm{Re}\,z\geq\circ$ و $\circ\leq\mathrm{Im}\,z\leq\pi$ را به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌کند؟



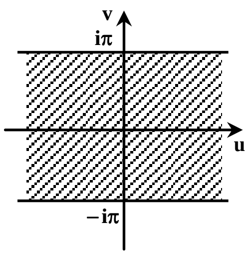
(۱)



(۲)



(۳)



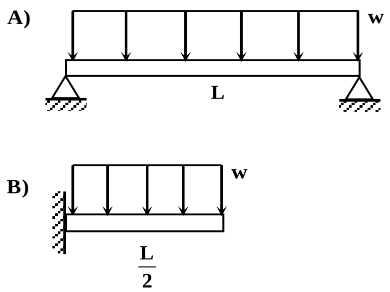
(۴)

۵۰ـ در سری لوران تابع $f(z)=e^{\frac{۱}{z}}Ln(۱+z)$ حول $z=۰$، ضریب $\frac{۱}{z}$ کدام است؟

۱) $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{(k+۱)!k}$ ۲) $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{(k+۲)!(k+۱)}$ ۳) $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{(k+۱)!k}$ ۴) $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{(k+۲)!(k+۱)}$

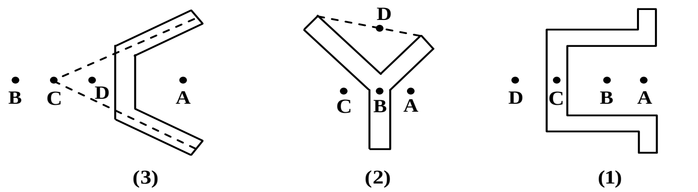
«مقاومت مصالح»

۵۱ـ در شکل زیر سطح مقطع هر دو میله یکسان است؛ اگر طول میله B نصف میله A باشد، نسبت $\frac{\sigma_{max_A}}{\sigma_{max_B}}$ برابر با کدام گزینه است؟



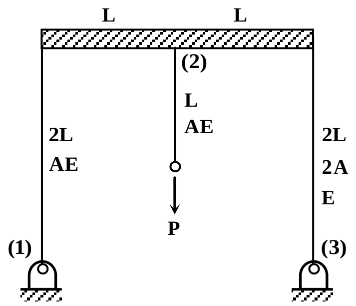
۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۵۲ـ در اشکال زیر به ترتیب از راست به چپ، مرکز برش در کدام نقطه قرار دارد؟



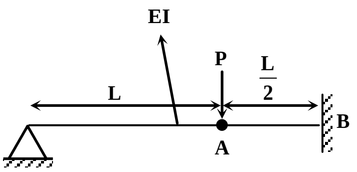
۱) C، D، D ۲) B، D، C ۳) C، B، C ۴) D، B، D

۵۳ـ در سیستم زیر میله افقی صلب می‌باشد. اگر نیروی P به میله وسطی وارد شود، تغییر طول میله (۲)، چند برابر تغییر طول میله (۳) می‌باشد؟



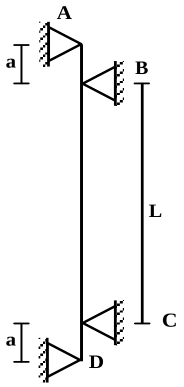
۱) ۴
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۲

۵۴ـ تغییر مکان قائم نقطه A کدام است؟



۱) $\frac{PL^۳}{۲۴EI}$ ۲) $\frac{PL^۳}{۸EI}$
۳) $\frac{PL^۳}{۳EI}$ ۴) $\frac{۸PL^۳}{۳EI}$

۵۵ـ تکیه‌گاه‌های یک ستون تحت بار فشاری $\mathbf{P}$ را می‌توان به صورت دو مفصل نزدیک به همدیگر در انتها مدل کرد. اگر فاصله $\mathbf{a}$ نسبت به طول $\mathbf{L}$ خیلی کوچک باشد، بار بحرانی $\mathbf{P_{Cr}}$ به کدام‌یک از مقادیر زیر نزدیک است؟



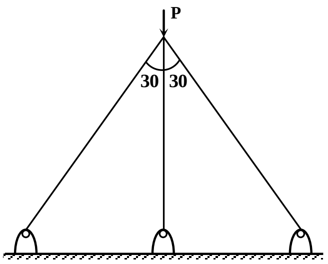
۱) $\frac{\pi^{۲}EI}{L^{۲}}$

۲) $\frac{\pi^{۲}EI}{(۰/۵L)^{۲}}$

۳) $\frac{\pi^{۲}EI}{(۰/۷L)^{۲}}$

۴) $\frac{\pi^{۲}EI}{(۲L)^{۲}}$

۵۶ـ در شکل زیر هر سه میله دارای سطح مقطع یکسان می‌باشند و بار بحرانی میله وسط P_{cr} است. بار بحرانی کل سازه چقدر است؟



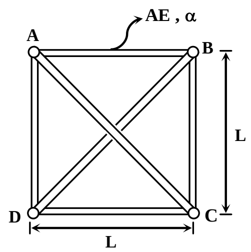
۱) P_{cr}

۲) $P_{cr}(۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۸})$

۳) $P_{cr}(۱+\sqrt{۳})$

۴) $P_{cr}(۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۴})$

۵۷ـ در شکل زیر دمای میله‌ها را به اندازه ΔT بالا می‌بریم. تنش ایجاد شده در عضو $\mathbf{DB}$ کدام است؟ (اتصالات از نوع مفصلی می‌باشند و میله‌ها مشابه هستند.)



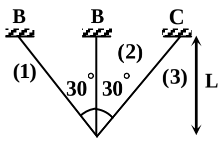
۱) $\alpha E \Delta T$

۲) $\sqrt{۲}\alpha E \Delta T$

۳) صفر

۴) $۲\alpha E \Delta T$

۵۸ـ در شکل زیر هر سه میله از جنس یکسان هستند. اگر درجه حرارت هر سه میله به اندازهٔ ΔT افزایش یابد، نیرو در عضو ۱ کدام است؟



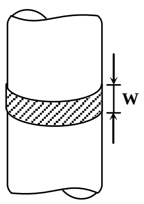
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۳}+۴}\alpha \Delta TAE$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴}\alpha \Delta TAE$

۳) $\frac{۳}{۳\sqrt{۳}+۴}\alpha \Delta TAE$

۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۳}+۴}\alpha \Delta TAE$

۵۹ـ رینگی به شعاع داخلی $\mathbf{r_i}$ به دور استوانه‌ای قرار گرفته است. فشار داخلی وارد بر رینگ برابر $\mathbf{P}$ می‌باشد. در صورتی که مدول الاستیسیته برابر $\mathbf{E}$ باشد، تغییر شعاع داخلی رینگ چه مقدار می‌باشد؟ ($\mathbf{r_i}$ شعاع داخلی و $\mathbf{r_o}$ شعاع خارجی رینگ می‌باشد.)



۱) $\frac{Pr_o^{۲}}{E(r_o-r_i)}$

۲) $\frac{Pr_i^{۲}}{E(r_o+r_i)}$

۳) $\frac{Pr_i^{۲}}{E(r_o-r_i)}$

۴) $\frac{Pr_o^{۲}}{E(r_o+r_i)}$

مهرپویا مهراس

دفترچه پاسخنامه

دروس تخصصی

۳۱ـ گزینه «۴»

ابتدا با محاسبه‌ی دترمینان، ضابطه تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 1 \times (x^3 + e^x) = x^3 + e^x$$

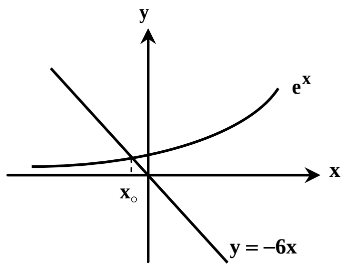
با محاسبه‌ی $f'(x)$ داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + e^x > 0$$

بنابراین اولاً $f(x)$ صعودی اکید است. ثانیاً $f(x)$ دارای ماکزیمم یا مینیمم نیست. زیرا صعودی اکید است و دامنه‌اش $(-\infty, +\infty)$ می‌باشد.

برای به دست آوردن طول نقطه عطف تابع $f(x)$ باید دو بار از آن مشتق بگیریم و ریشه‌های ساده مشتق دوم را به دست آوریم، لذا داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + e^x \Rightarrow f''(x) = 6x + e^x = 0 \Rightarrow -6x = e^x$$



برای به دست آوردن ریشه معادله $f''(x) = 0$ نمودارهای دو تابع $-6x$ و e^x را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و به تعداد نقاط برخورد دو تابع ریشه خواهیم داشت. بنابراین معادله $f''(x) = 0$ دارای یک ریشه با طول منفی می‌باشد که همان طول نقطه عطف تابع $f(x)$ است. اکنون حد عبارت داده شده در گزینه (۳) را بررسی می‌کنیم. در مخرج کسر x^5 داریم و در صورت کسر هم‌ارزی‌ها را تا رسیدن به جمله x^5 ادامه می‌دهیم. نوشتن جملات بیشتر ضرری ندارد اما لازم نیست.

$$\lim_{x\to 0} \frac{6[x^3 + (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}) - (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) - x] - 7x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6}{5!}x^5}{x^5} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

و این یعنی فقط گزینه (۴) از بین گزینه‌ها صحیح نیست.

۳۲ـ گزینه «۱» **روش تشریحی:** ابتدا نمایش قطبی عدد مختلط $z=-1+i\sqrt{3}$ را می‌نویسیم. با توجه به آن که این عدد در ربع دوم قرار دارد، خواهیم داشت $\theta=tg^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$ و $r=\sqrt{1+3}=2$ لذا $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و در نتیجه $z^n=2^n e^{i\frac{2n\pi}{3}}$ است. حال به محاسبه عبارت داده شده می‌پردازیم، با فاکتور گرفتن از $2^n z^n$ راحت‌تر می‌توانیم آن را حساب کنیم:

$$w=z^{2n}+2^n z^n+2^{2n}=2^n z^n(\frac{z^n}{2^n}+1+\frac{2^n}{z^n})=2^n\times 2^n e^{i\frac{2n\pi}{3}}(e^{i\frac{2n\pi}{3}}+1+\frac{1}{e^{i\frac{2n\pi}{3}}})$$

حال توجه کنید که $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$، لذا داریم: $w=2^{2n}e^{i\frac{2n\pi}{3}}(1+2\cos\frac{2n\pi}{3})$

اکنون می‌خواهیم $\cos\frac{2n\pi}{3}$ را حساب کنیم. n مضرب ۳ نیست لذا $n=3k+1$ یا $n=3k+2$.

اگر $n=3k+1$ باشد، داریم: $\cos(\frac{2n\pi}{3})=\cos(\frac{2(3k+1)\pi}{3})=\cos(2k\pi+\frac{2\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}$

اگر هم $n=3k+2$ باشد، با انجام همین محاسبات داریم: $\cos(\frac{2n\pi}{3})=\cos(\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}$

بنابراین در هر صورت مقدار کسینوس در این زاویه برابر با $-\frac{1}{2}$ هست. در نتیجه داریم: $w=2^{2n}e^{i\frac{2n\pi}{3}}(1+2(-\frac{1}{2}))=0$

روش تستی: می‌خواهیم با مقداردهی به n مسأله را حل کنیم. انتخاب $n=0$ یا $n=3$ درست نیست چون مضرب ۳ هستند. انتخاب $n=1$ باعث برابر شدن گزینه‌های (۱) و (۴) می‌شود. اما با انتخاب $n=2$ می‌توانیم مسأله را در حالت خاص حل کنیم:

$$n=2 \Rightarrow w=z^4+4z^2+16 \Rightarrow w=(z^2+2)^2+12$$

$$z^2=(-1+i\sqrt{3})^2=-2-2i\sqrt{3} \Rightarrow w=(-2-2i\sqrt{3}+2)^2+12=-12+12=0$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۳۳ـ گزینه «۳»

از جمله سؤالاتی که در رشته‌های مختلف نمونه‌های آن طرح شده است. با توجه به سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ باید به سؤال جواب دهیم. چون پُشت x^n، توان (۳) از n وجود دارد، پس باید از مشتق‌گیری‌های متوالی از طرفین نسبت به x به جواب برسیم. ابتدا برای اولین بار مشتق می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{\text{برای این که توان } x \text{ همان } n \text{ شود، طرفین را در } x \text{ ضرب می‌کنیم}} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{دوباره مشتق می‌گیریم}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1(1-x)^2 - 2(-1)(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

دوباره طرفین را در x ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \xrightarrow{\text{دوباره مشتق می‌گیریم}} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} = \frac{(2x+1)(1-x)^3 - 3(-1)(1-x)^2(x^2+x)}{(1-x)^6} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$$

توجه: طبق نکته همواره داریم: $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ که در آن $P_k(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه k است.

نکته تستی: بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) همان ابتدا رد می‌شوند و اگر طراح در گزینه‌های (۱) و (۳) کمی تفاوت قائل می‌شد، می‌شد جواب را با توجه به نکته بدون حل تست تعیین کرد.

۳۴ـ گزینه «۴» برای محاسبه حد A توجه داریم که همه‌ی جملات در صورت کسر به صورت $(2k-1)^3$ هستند که در آن $1 \le k \le n$. با توجه به آن که $n \to \infty$ میل می‌کند، داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 \simeq \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 8\sum_{k=1}^{n} k^3 \simeq 8\frac{n^4}{4}$$

در مخرج کسر نیز از هم‌ارزی $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \simeq \frac{n^3}{3}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8\frac{n^4}{4}}{n(\frac{n^3}{3})} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

برای محاسبه حد B از قضیه ساندویچ (فشردگی) استفاده می‌کنیم. بزرگ‌ترین جمله این مجموع همان جمله اول است و

کوچک‌ترین جمله‌اش، جمله‌ی آخر است، بنابراین می‌نویسیم: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{n}{\sqrt{n^۴+n}}) \le \lim\limits_{n\to\infty} B_n \le \lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{n}{\sqrt{n^۴+۱}})$

با استفاده از قاعده‌ی بزرگ‌ترین درجه داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\sqrt{n^۴+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲}{n^۲}=۱$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\sqrt{n^۴+۱}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲}{n^۲}=۱$

بنابراین داریم: $۱\le \lim\limits_{n\to\infty} B_n \le ۱ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} B_n = ۱$

۳۵ـ گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $u = Ln(x+\sqrt{۱+x^۲})$ داریم:

$$du = \frac{۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}{x+\sqrt{۱+x^۲}}dx = \frac{\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{x+\sqrt{۱+x^۲}}dx = \frac{dx}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$I = \int_۰^۱ \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_۰^۱ u^{-\frac{۱}{۲}}du = ۲\sqrt{u}\,\Big|_۰^۱ = ۲\sqrt{Ln(x+\sqrt{۱+x^۲})}\,\Big|_۰^۱ = ۲\sqrt{Ln(۱+\sqrt{۲})}$$

۳۶ـ گزینه «۱» از نتیجه قضیه استوکس استفاده می‌کنیم، یعنی به‌جای اینکه روی سطح S انتگرال سطح را محاسبه کنیم، روی سطح $z=۰$ که دارای مرز مشترک با این رویه است، انتگرال سطح را می‌یابیم.روی سطح $z=۰$ بردار قائم یکه $n=\pm\vec{k}$ است و با توجه به این که در نتیجه قضیه استوکس جهت بردار قائم یکّه بر سطح جدید، با جهت بردار یکـه سـطح اصـلی یکسـان اسـت، بنابراین $n=\vec{k}$ است.برای محاسبه $curl\vec{F}$ چون باید حاصل $curl\vec{F}\cdot\vec{n}$ را بعد از آن بیابیم و $n=\vec{k}$ می‌باشد، لذا مؤلفـه‌هـای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ آن تأثیری در حل سؤال ندارند و ما فقط مؤلفه سوم یا $\vec{k}$ را می‌یابیم.

$$curl\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^۲e^z-۲y^۳\cos(xz) & ۲x^۳e^z & e^{xz}\sin(y^۲z) \end{vmatrix} = (\text{هرچی}\ \text{بلشد})\vec{i} + (\text{هرچی}\ \text{بلشد})\vec{j} + \vec{k}(۶x^۲e^z+۶y^۲\cos(xz)) \xrightarrow{z=۰}$$

$$curl\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma = ۶(x^۲+y^۲)d\sigma$$

حال برای محاسبه انتگرال روی سطح جدید، در معادله S به جای z عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$۳x^۲+۳y^۲+۳(۰-۲)^۲=۱۵ \Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲=۳ \Rightarrow x^۲+y^۲=۱$$

درنتیجه سطح جدید دایره‌ای به شعاع ۱ در صفحه $z=\circ$ می‌باشد و داریم:

$$I=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma \xrightarrow{\text{قطبی}} I=۶\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{۱} r^۲\times r\,dr\,d\theta=۶\int_\circ^{۲\pi}\left(\frac{r^۴}{۴}\right)\Big|_\circ^{۱}\,d\theta \Rightarrow I=\frac{۶}{۴}(\theta)\Big|_\circ^{۲\pi}=\frac{۱۲\pi}{۴}=۳\pi$$

۳۷ـ گزینه «۳» اولاً توجه کنید که چون مبدأ مختصات درون منحنی C قرار دارد، **نمی‌توان از قضیه گرین استفاده کرد** و باید از روش پارامتری‌سازی به حل انتگرال بپردازیم، با توجه به معادله منحنی C داریم:

$$x=۲\cos t,\ y=۳\sin t \Rightarrow \vec{C}(x)=(۲\cos t)\vec{i}+(۳\sin t)\vec{j}\ ,\quad \circ\le t\le ۲\pi$$

از طرفی $dx=-۲\sin t\,dt$ و $dy=۳\cos t\,dt$ است و بنابراین داریم:

$$I=\int_\circ^{۲\pi}\frac{(-۳\sin t)(-۲\sin t)+(۲\cos t)(۳\cos t)}{۴(۲\cos t)^۲+۹(۳\sin t)^۲}dt=\int_\circ^{۲\pi}\frac{۶\sin^۲ t+۶\cos^۲ t}{۱۶\cos^۲ t+۸۱\sin^۲ t}dt=\int_\circ^{۲\pi}\frac{۶dt}{۱۶\cos^۲ t+۸۱\sin^۲ t}$$
$$=۶\int_\circ^{۲\pi}\frac{dt}{۱۶\cos^۲ t+۸۱\sin^۲ t}$$

حال دقت کنید که تابع $۱۶\cos^۲ t+۸۱\sin^۲ t$ متناوب با دوره تناوب π است، بنابراین می‌توانیم که حدود انتگرال را به صورت $\int_\circ^{\pi}$ بنویسیم و یک ۲ پشت انتگرال قرار دهیم. از طرفی می‌توان از تقارن انتگرال نسبت به خط $t=\frac{\pi}{۲}$ استفاده کرد و حدود انتگرال را به صورت $\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}$ نوشته و در عوض یک ۲ در پشت انتگرال ضرب کرد، بنابراین داریم:

$$I=۶\times۲\times۲\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۱۶\cos^۲ t+۸۱\sin^۲ t}=۲۴\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۱۶\cos^۲ t+۸۱\sin^۲ t}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج کسر را بر } \cos^۲ t \text{ تقسیم می‌کنیم}} I=۲۴\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{۱}{\cos^۲ t}dt}{۱۶+۸۱tg^۲ t}$$

با فرض $u=tgt$، آن‌گاه $du=\frac{۱}{\cos^۲ t}dt$ و داریم:

$$I=۲۴\int_\circ^{+\infty}\frac{du}{۱۶+۸۱u^۲}=۲۴\int_\circ^{+\infty}\frac{du}{۱۶(۱+\frac{۸۱}{۱۶}u^۲)}=\frac{۲۴}{۱۶}\times\frac{۴}{۹}[\operatorname{Arctg}\frac{۹}{۴}u]\Big|_\circ^{+\infty}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۹}\times[\operatorname{Arctg}(+\infty)-\operatorname{Arctg}(\circ)]=\frac{۲}{۳}(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۳}$$

روش ساده‌تر: با توجه به توضیحات متن کتاب، چون در این سؤال شرط $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ برقرار است، می‌توان بـه جـای مسـیر C، مسـیر ساده‌تری که درون آن شامل مبدأ مختصات باشد را جایگزین کرد و مسـیر $۴x^۲+۹y^۲=۱$ را انتخـاب مـی‌کنـیم. بنـابراین بـا فـرض