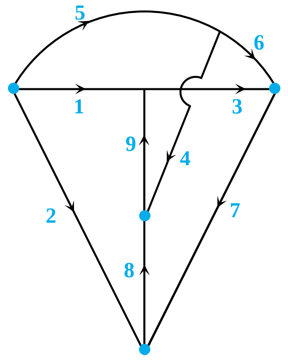
پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل ششم

۱ـ گزینه «۱» جهت نوشتن ولتاژهای V_1 و V_2 و V_3 و V_4 برحسب ولتاژهای شاخه‌های V_5 و V_6 و V_7 و V_8 و V_9 درختی انتخاب می‌شود که شامل شاخه‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ باشد. حال دیده می‌شود که شاخه ۱ با شاخه‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ در یک حلقه است و همچنین شاخه ۲ با شاخه‌های ۵ و ۶ و ۷ در یک حلقه است. علاوه بر این شاخه ۳ با شاخه‌های ۷ و ۸ و ۹ در یک حلقه بوده و شاخه (۴) نیز با شاخه‌های ۶ و ۷ و ۸ در یک حلقه می‌باشد. (به عبارت دیگر منظور سؤال این است که شاخه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ به عنوان لینک و شاخه‌های ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به عنوان شاخه‌های درخت انتخاب شوند.) لذا داریم:



$$\begin{cases} V_1 = V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 \\ V_2 = V_5 + V_6 + V_7 \\ V_3 = -V_7 - V_8 - V_9 \\ V_4 = V_6 + V_7 + V_8 \end{cases}$$

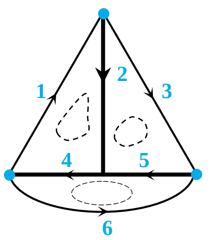
با مرتب کردن معادلات به صورت ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

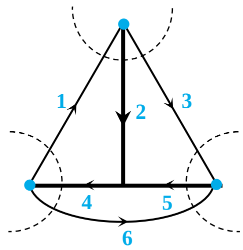
۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $\omega = 1$ است، لذا $X_C = \frac{1}{C\omega} = 1$ است و $X_L = L\omega = 1$ می‌باشد. حال با توجه به روش گفته شده در متن درس، عناصر قطر اصلی، حاصل جمع ادمیتانس‌های متصل به هر گره و عناصر قطر فرعی، منفی مجموع ادمیتانس‌های مشترک بین گره‌ها هستند.

$$Y(j\omega) = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{j} & -\frac{1}{j} \\ -\frac{1}{j} & 1+\frac{1}{j}-\frac{1}{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به درخت انتخاب شده، کاتست‌های اساسی و حلقه‌های اساسی به صورت زیر است:



حلقه‌های اساسی = {۳,۵,۲},{۱,۲,۴},{۴,۵,۶}

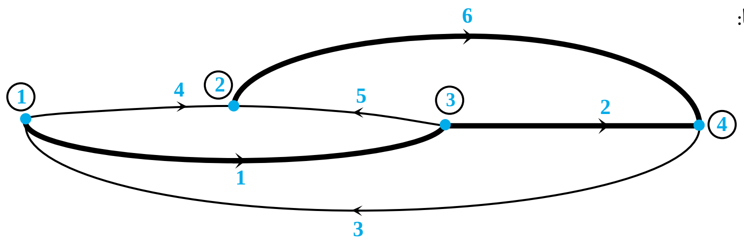


کاتست‌های اساسی = {۳,۵,۶},{۱,۲,۳},{۱,۴,۶}

۴ـ گزینه «۳» روش اول: با توجه به ترسیم گراف مدار، درخت مورد نظر به صورت {۱,۲,۶} است.

روش دوم: $n_t = 4$ در نتیجه تعداد شاخه‌های درخت برابر است با:

$n_t - 1 = 3$ که تنها گزینه‌ی (۳) به این صورت است.



۵ـ گزینه «۴» از حاصلضرب ماتریس A در ماتریس جریان‌های شاخه‌ها، معادلات KCL مستقل به صورت زیر حاصل می‌شود:

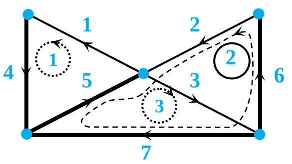
$$A.j=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{معادلات مستقل KCL}): \begin{cases} j_1 - j_2 - j_3 = 0 \\ -j_1 + j_4 - j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 - j_7 = 0 \end{cases}$$

۶ـ گزینه «۱» در گراف فوق با توجه به اینکه $n_t = 5$ می‌باشد، داریم:

$$b = 7 \quad n = n_t - 1 = 4$$

$$L = b - n = 7 - 4 = 3$$

با توجه به اینکه تعداد لینک‌ها ۳ تا بوده و قسمت اول ماتریس B مربعی و ماتریس واحد است، لذا شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ لینک و بقیه شاخه‌ها، شاخه‌های عادی درخت می‌باشند. بنابراین ماتریس $B(L \times b)$ به صورت 3×7 بوده و حلقه‌های اساسی گراف به صورت زیر است:



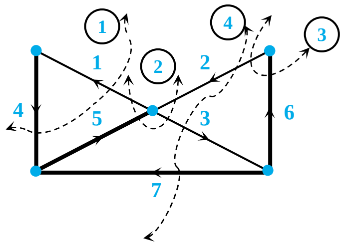
$$\{1,4,5\}, \{5,2,6,7\}, \{5,7,3\}$$

$$\begin{cases} V_1 + V_4 + V_5 = 0 \\ V_2 + V_6 - V_7 - V_5 = 0 \\ V_3 + V_7 + V_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{I_{L\times L}} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}_{F_{L\times n}} \end{array}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا مشخصات ابتدایی گراف را بدست می‌آوریم.

$$b = 7 \quad , \quad n = n_t - 1 = 4$$

$$n_t = 5 \quad , \quad L = b - n = 7 - 4 = 3$$



در صورتی که بخواهیم ماتریس Q_1 را بدست آوریم، با توجه به اینکه قسمت آخر ماتریس Q_1 ماتریس واحد 4×4 است، لذا لینک‌های گراف ۳ تا می‌باشند و با توجه به اینکه کاتست‌های اساسی همگی باید فقط دارای یک شاخه درخت باشند، بنابراین شاخه‌های ۷ و ۶ و ۵ و ۴ شاخه‌های درخت اصلی هستند و به ازای هر کدام از آنها یک کاتست اساسی به صورت مقابل موجود است:

$$\{1,4\} \ \{2,6\} \ \{1,5,3,2\} \ \{2,3,7\}$$

حال معادلات کاتست‌های اساسی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} I_4 - I_1 = 0 \\ I_5 + I_2 - I_3 - I_1 = 0 \\ I_6 - I_2 = 0 \\ I_7 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q_1 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{E_{n\times L} = E_{4\times 3}} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}_{I_{n\times n} = I_{4\times 4}} \end{array}$$

۸ـ گزینه «۱» ابتدا باید ماتریس B را به حالت استاندارد $B = [I \vdots F]$ تبدیل کنیم؛ لذا به دنبال ستون‌هایی می‌گردیم که عبارت ۱، یک بار در آنها باشد و بقیه ستون عدد صفر باشد. حال ستون‌های مذکور را طوری کنار یکدیگر قرار می‌دهیم که ماتریس مربعی I تشکیل شود.

با دقت در ماتریس B دیده می‌شود که گراف مذکور دارای ۴ لینک بوده و درخت آن شامل ۳ شاخه می‌باشد.

$$B = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$I_{4\times 4} \qquad F_{4\times 3}$$

۹ـ گزینه «۱» ماتریس واحد قسمت اول Q ماتریس ۴×۴ بوده و بیانگر این است که شاخه‌های درخت در گراف ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و لینک‌ها ۵ و ۶ و ۷ هستند. حال با توجه به ساختار ماتریس Q داریم:

$$Q=[I\vdots E] \quad , \quad F=-E^T \quad , \quad B=[F\vdots I]$$

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow F=-E^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=[F\vdots I]=\left[\begin{array}{cccc:ccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

دقت کنید که ماتریس‌های B و Q همواره باید شروط $BQ^T=0$ و $QB^T=0$ را برآورده کنند و بنابراین در این تست ساختار B به شکل $B=[F\vdots I]$ در نظر گرفته شد:

$$BQ^T=[F\vdots I]\begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ E^T \end{bmatrix}=F+E^T=0$$

۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به تشکیل ماتریس B در مثال قبل و با استفاده از رابطه $B.V=0$، حلقه‌های اساسی گراف به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$B.V=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} -V_3+V_5=0 & \Rightarrow \{3,5\} \\ -V_2+V_3-V_4+V_6=0 & \Rightarrow \{2,3,4,6\} \\ V_1-V_3-V_4+V_7=0 & \Rightarrow \{1,3,4,7\} \end{cases}$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل هفتم

۱ـ گزینه «۴» با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-e_s - V_o + V_C - ۲V_L = ۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

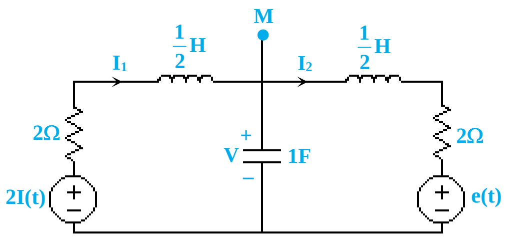
$$V_C - ۲V_L - V_L - ۳I_L = ۰ \quad \Rightarrow \quad V_L = \frac{۱}{۳}[V_C - ۳I_L] \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V_o = V_C - ۲V_L - e_s = V_C - ۲\left[\frac{۱}{۳}V_C - I_L\right] - e_s \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_o = \frac{۱}{۳}V_C + ۲I_L - e_s}$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا در سمت چپ مدار تبدیل منابع می‌زنیم و با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$\frac{۱}{۲}\frac{dI_۱}{dt} + V - ۲I(t) + ۲I_۱ = ۰$$



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$\frac{۱}{۲}\frac{dI_۲}{dt} + ۲I_۲ + e(t) - V = ۰$$

با نوشتن KCL در گره M داریم:

$$\frac{dV}{dt} = I_۱ - I_۲$$

با مرتب‌سازی معادلات به صورت ماتریسی داریم:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dI_۱}{dt} \\ \frac{dI_۲}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به صورت مسأله شرایط اولیه صفر است.

$$V_۱(۰^-) = V_۲(۰^-) = I(۰^-) = ۰$$

حال با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V = V_۱ - V_۲ \quad , \quad I_{C_۲} = I_L = \frac{dV_۲}{۳dt} \Rightarrow \frac{dV_۲}{dt} = ۳I_L$$

با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$I_{C_۱} = -I_L + I_S \; , \; \frac{dV_۱}{dt} = -I_L + I_S \; , \; \frac{dV}{dt} = \frac{d(V_۱ - V_۲)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV_۱}{dt} - \frac{dV_۲}{dt} = -I_L + I_S - ۳I_L = -۴I_L + I_S \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -۴I_L + I_S \quad (۱) \quad , \quad \frac{dI_L}{dt} = V \quad (۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{d^۲I_L}{dt^۲} = -۴I_L + I_S \Rightarrow \frac{d^۲I_L}{dt^۲} + ۴I_L = \delta(t) \; , \; I_L(۰^-) = ۰$$

با توجه به این که سلف در پاسخ به ورودی‌های ضربه در مدار، در لحظه اول همچون مدار باز عمل می‌کند، پس با در نظر گرفتن ساختار مدار، منبع جریان ضربه‌ای در لحظه اول به طور کامل از خازن ۱ فارادی رد شده و تأثیر آنی در جریان سلف نخواهد گذشت؛ بنابراین می‌توان نوشت: $I_L(۰^+) = ۰$

حال با توجه به معادله دیفرانسیل بدست آمده برای I_L و مقدار $I_L(۰^+)$، $I_L(t)$ را به صورت $A\sin(۲t)u(t)$ در نظر می‌گیریم:

$$I_L(t) = A\sin(۲t)u(t) \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = ۲A\cos(۲t)u(t) \; , \; \frac{d^۲I_L}{dt^۲} = -۴A\sin(۲t)u(t) + ۲A\delta(t)$$

$$\Rightarrow -۴A\sin(۲t)u(t) + ۲A\delta(t) + ۴A\sin(۲t)u(t) = \delta(t) \Rightarrow A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow I_L(t) = \frac{۱}{۲}\sin(۲t)u(t) \; , \; V(t) = \frac{dI_L}{dt} = \cos(۲t)u(t)$$

حال با فرض $t > ۰$ داریم:

$$V^۲(t) + ۴ \times I_L^۲(t) = \cos^۲(۲t) + ۴ \times \frac{۱}{۴}\sin^۲(۲t) = \cos^۲(۲t) + \sin^۲(۲t) = ۱ \Rightarrow \mathbf{V^۲ + ۴I_L^۲ = ۱}$$

۴ـ گزینه «۲» برای حل این سؤال باید به محاسبه‌ی مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم بپردازیم. بنابراین داریم:

$$\det[SI - A] = \det\left(S \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} S & -۱ \\ ۱ & S+۱ \end{vmatrix} = S^۲ + S + ۱$$

$$\det[SI - A] = S^۲ + S + ۱ = ۰ \Rightarrow S_{۱,۲} = -\frac{۱}{۲} \pm j\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین پاسخ ضربه مدار به فرم روبرو است:

$$\mathbf{h(t) = ke^{-\frac{۱}{۲}t}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \theta)u(t)}$$

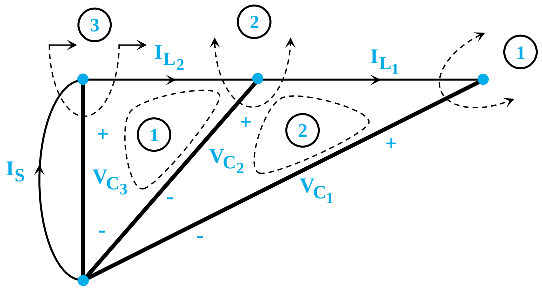
۵ـ گزینه «۲» با نوشتن KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$\begin{cases} V_2 + V_1 + I_1\times 1 + (I_1 - I_2)\times 1 + I_2 = 0 \\ -I_2 + (I_2 - I_1)\times 1 + V_2 + I_2\times 1 + V_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 = -2I_1 \\ V_1 + V_2 = I_1 - I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = -2I_1 \\ \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = I_1 - I_2 \end{cases} \Rightarrow -2I_1 = I_1 - I_2 \Rightarrow I_2 = 3I_1$$

با توجه به اینکه معادلات بالا دارای استقلال خطی نمی‌باشند، لذا انتخاب دو جریان سلف به عنوان متغیر حالت اشتباه است؛ بنابراین فقط جریان I_1 را به عنوان متغیر حالت انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = -2I_1 \xrightarrow{I_2 = 3I_1} 4\frac{dI_1}{dt} = -2I_1 \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{2}I_1 \Rightarrow A = [-\frac{1}{2}]$$

۶ـ گزینه «۱» برای حل تست ابتدا متغیرهای حالت را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم. حال درخت مناسبی را انتخاب می‌کنیم که شامل تمام خازن‌ها باشد و سلف‌ها را شامل نشود. سپس معادلات حلقه‌های اساسی برای سلف‌ها و معادلات کاتست‌های اساسی را برای خازن‌ها می‌نویسیم.



$$X = \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ V_{C_3} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} \quad , \quad W = I_S$$

$$\begin{cases} \text{(۱) حلقه اساسی}: L_2\frac{dI_{L_2}}{dt} = V_{C_3} - V_{C_2} \\ \text{(۲) حلقه اساسی}: L_1\frac{dI_{L_1}}{dt} = -V_{C_1} + V_{C_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{(۱) کاتست اساسی}: C_1\frac{dV_{C_1}}{dt} = I_{L_1} \\ \text{(۲) کاتست اساسی}: C_2\frac{dV_{C_2}}{dt} = I_{L_2} - I_{L_1} \\ \text{(۳) کاتست اساسی}: C_3\frac{dV_{C_3}}{dt} = I_S - I_{L_2} \end{cases}$$

با بازنویسی معادلات بالا داریم:

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = 0\times V_{C_1} + 0\times V_{C_2} + 0\times V_{C_3} + \frac{1}{C_1}I_{L_1} + 0\times I_{L_2} + 0\times I_S$$

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = 0\times V_{C_1} + 0\times V_{C_2} + 0\times V_{C_3} - \frac{1}{C_2}I_{L_1} + \frac{1}{C_2}I_{L_2} + 0\times I_S$$

$$\frac{dV_{C_3}}{dt} = 0\times V_{C_1} + 0\times V_{C_2} + 0\times V_{C_3} + 0\times I_{L_1} - \frac{1}{C_3}I_{L_2} + \frac{1}{C_3}I_S$$

$$\frac{dI_{L_1}}{dt} = -\frac{1}{L_1}V_{C_1} + \frac{1}{L_1}V_{C_2} + 0\times V_{C_3} + 0\times I_{L_1} + 0\times I_{L_2} + 0\times I_S$$

$$\frac{dI_{L_2}}{dt} = 0\times V_{C_1} - \frac{1}{L_2}V_{C_2} + \frac{1}{L_2}V_{C_3} + 0\times I_{L_1} + 0\times I_{L_2} + 0\times I_S$$

حال با مرتب‌سازی معادلات بالا به صورت ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_{C_1}}{dt} \\ \frac{dV_{C_2}}{dt} \\ \frac{dV_{C_3}}{dt} \\ \frac{dI_{L_1}}{dt} \\ \frac{dI_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ V_{C_3} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I_S \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است که اگر در گزینه‌ها، ماتریس A با سطرهای متفاوت وجود داشته باشد، می‌توان با بدست آوردن فقط چند سطر از ماتریس A به جواب رسید و محاسبه بقیه سطرها الزامی ندارد. دقت کنید چنانچه ترتیب اختیار متغیرهای حالت در صورت سؤال ذکر نشده باشد، ترتیب دلخواهی را برای متغیرهای حالت انتخاب می‌کنیم (مثلاً ابتدا جریان سلف‌ها، بعد ولتاژ خازن‌ها) و سپس A را بدست می‌آوریم. در این صورت باید گزینه‌ای انتخاب شود که سطرها و ستون‌هایش با یک منطق قابل قبول، شیفت یافته‌ی سطرها و ستون‌های پاسخ ما باشد. به عنوان نمونه می‌توان دو حالت خاص زیر را بیان کرد:

۱ـ اگر بردار حالت به طور کامل وارونه گردد، درایه‌های ماتریس حالت در نقطه تقارن خود نسبت به نقطه‌ی مرکزی ماتریس قرار خواهند گرفت.

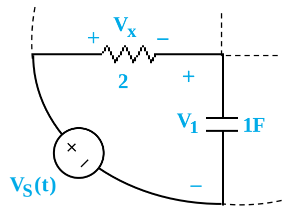
۲ـ اگر بردار حالت به اندازه k واحد به سمت پایین شیفت چرخشی داده شود، ابتدا ستون‌ها به سمت پایین و سپس سطرها به سمت راست به اندازه k واحد شیفت چرخشی پیدا می‌کنند. در مورد شیفت چرخشی بردار حالت به سمت بالا نیز باید ستون‌ها به سمت بالا و سطرها به سمت چپ شیفت چرخشی داده شوند.

برای مثال چنانچه بردار X را به صورت $X=\begin{bmatrix} I_{L_۱} \\ I_{L_۲} \\ V_{C_۱} \\ V_{C_۲} \\ V_{C_۳} \end{bmatrix}$ انتخاب کرده بودیم، داشتیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \frac{-۱}{L_۱} & \frac{۱}{L_۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{-۱}{L_۲} & \frac{۱}{L_۲} \\ \frac{۱}{C_۱} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{-۱}{C_۲} & \frac{۱}{C_۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{-۱}{C_۳} & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{و شیفت چرخشی سطرها به اندازه ۲ واحد به سمت چپ}]{\text{شیفت چرخشی ستون‌ها به اندازه ۲ واحد به سمت بالا}} A'=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{C_۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{C_۲} & \frac{۱}{C_۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{C_۳} \\ -\frac{۱}{L_۱} & \frac{۱}{L_۱} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{L_۲} & \frac{۱}{L_۲} & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه گزینه (۱) درست است.

۷ـ گزینه «۴» علی‌رغم پیچیدگی ظاهر سؤال، این تست بسیار ساده است. ابتدا کافیست یک KVL ساده در حلقه‌ی زیر بزنیم:



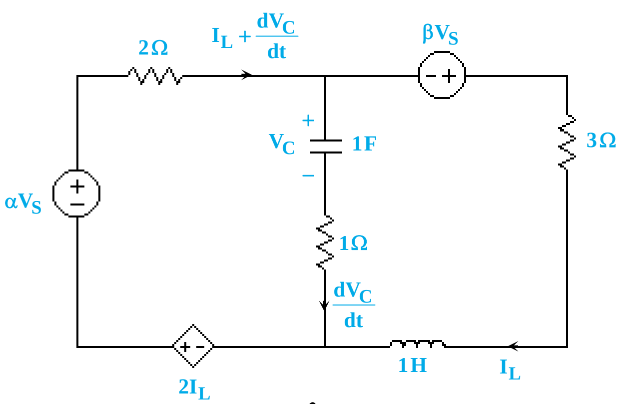
$$V_x + V_۱ - V_S = ۰ \Rightarrow V_x = -V_۱ + V_S$$

i_x نیز کاملاً مشخص است:
$$i_x = \frac{V_۱}{۲}$$

حال روابط فوق را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} i_x = \frac{V_۱}{۲} \\ V_x = -V_۱ + V_S \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_x \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

۸ـ گزینه «۳» برای نوشتن معادلات حالت مدار پس از مشخص کردن جریان شاخه‌ها در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-2I_L-\alpha V_S+2\left[I_L+\frac{dV_C}{dt}\right]+V_C+1\left[\frac{dV_C}{dt}\right]=0 \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{1}{3}V_C+\frac{\alpha V_S}{3} \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-\beta V_S+3I_L+\frac{dI_L}{dt}-\frac{dV_C}{dt}\times 1-V_C=0 \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=V_C+\frac{dV_C}{dt}-3I_L+\beta V_S \qquad (2)$$

با قرار دادن $\frac{dV_C}{dt}$ از رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{dI_L}{dt}=V_C+\left(-\frac{1}{3}V_C+\frac{\alpha V_S}{3}\right)-3I_L+\beta V_S \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=+\frac{2}{3}V_C-3I_L+V_S\left(\frac{\alpha}{3}+\beta\right) \qquad (3)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۱) و (۳) داریم:

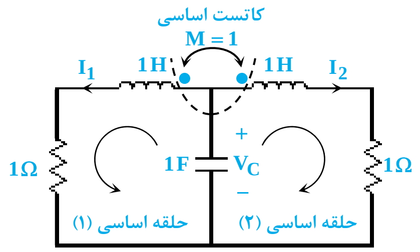
$$\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{I}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{3}\\ \frac{\alpha}{3}+\beta\end{bmatrix}V_S$$

با مقایسه رابطه بالا با اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha=2\\ \frac{\alpha}{3}+\beta=\frac{11}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}+\beta=\frac{11}{3} \Rightarrow \beta=3\end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=5$$

۹ـ گزینه «۱» با توجه به این که سؤال فقط ماتریس A را می‌خواهد، لذا منابع را بی‌اثر کرده و سپس درخت شامل خازن را انتخاب می‌کنیم.

حال روابط مربوط به کاتست اساسی و حلقه‌های اساسی را می‌نویسیم:



$$\text{کاتست اساسی}: \frac{dV_C}{dt}=-I_1-I_2$$

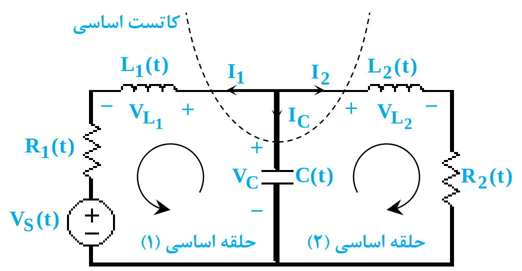
$$\left.\begin{array}{l}\text{حلقه اساسی (۱)}: \frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}+I_1-V_C=0 \Rightarrow \frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}=V_C-I_1\\ \text{حلقه اساسی (۲)}: \frac{dI_2}{dt}+\frac{dI_1}{dt}+I_2-V_C=0 \Rightarrow \frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}=V_C-I_2\end{array}\right\} \Rightarrow V_C-I_1=V_C-I_2 \Rightarrow I_1=I_2$$

لذا جریان سلف‌ها مستقل از یکدیگر نیستند. با انتخاب I_1 به عنوان متغیر حالت داریم:

$$\begin{cases}\frac{dV_C}{dt}=-2I_1\\ \frac{dI_1}{dt}=+\frac{1}{2}V_C-\frac{1}{2}I_1\end{cases}$$

اگر $x=\begin{bmatrix}V_C\\ I_1\end{bmatrix}$ باشد، در نتیجه $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و اگر $x=\begin{bmatrix}I_1\\ V_C\end{bmatrix}$ باشد، $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -2 & 0\end{bmatrix}$. با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود پاسخ صحیح گزینه (۱) می‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۲» درخت مورد نظر را طوری انتخاب می‌کنیم که شامل خازن باشد. حال با نوشتن معادلات کاتست اساسی و حلقه‌ی اساسی داریم:



$$\text{کاتست اساسی}: I_C=-I_1-I_2 \quad ; \quad I_C=\frac{d\overbrace{(C(t)V_C)}^{q(t)}}{dt}$$

$$\Rightarrow C(t)\frac{dV_C}{dt}+C'(t)V_C=-I_1-I_2$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{C'(t)}{C(t)}V_C-\frac{1}{C(t)}I_1-\frac{1}{C(t)}I_2$$

(۱) حلقه‌ی اساسی : $V_{L_1}(t)+R_1(t)I_1+V_S(t)-V_C=0 \Rightarrow \dfrac{d(\overbrace{L_1(t)I_1(t)}^{\phi_1(t)})}{dt}+R_1(t)I_1+V_S(t)-V_C=0$

$$L_1(t)\frac{dI_1}{dt}+L_1'(t)I_1+R_1(t)I_1+V_S(t)-V_C=0 \Rightarrow \frac{dI_1}{dt}=-\frac{(R_1(t)+L_1'(t))}{L_1(t)}I_1+\frac{1}{L_1(t)}V_C-\frac{V_S(t)}{L_1(t)}$$

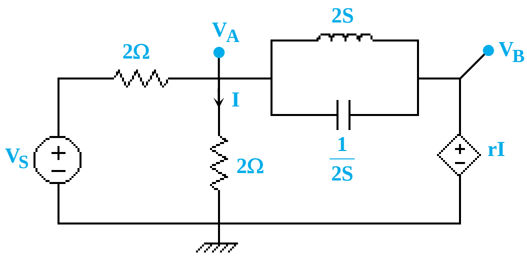
(۲) حلقه‌ی اساسی : $V_{L_2}(t)+R_2(t)I_2-V_C=0 \Rightarrow \dfrac{d\,(\overbrace{L_2(t)I_2}^{\phi_2(t)})}{dt}+R_2(t)I_2-V_C=0$

$$L_2(t)\frac{dI_2}{dt}+L_2'(t)I_2+R_2(t)I_2-V_C=0 \Rightarrow \frac{dI_2}{dt}=-\frac{(R_2(t)+L_2'(t))}{L_2(t)}I_2+\frac{1}{L_2(t)}V_C$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dV_C}{dt}\\ \dfrac{dI_1}{dt}\\ \dfrac{dI_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{C'(t)}{C(t)} & -\dfrac{1}{C(t)} & -\dfrac{1}{C(t)}\\ \dfrac{1}{L_1(t)} & -\dfrac{(R_1(t)+L_1'(t))}{L_1(t)} & 0\\ \dfrac{1}{L_2(t)} & 0 & -\dfrac{(L_2'(t)+R_2(t))}{L_2(t)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_1\\ I_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{L_1(t)}\\ 0\end{bmatrix}V_S(t)$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل هشتم

۱ـ گزینه «۲» **روش اول:** با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$\begin{cases} \dfrac{V_A - V_S}{۲} + \dfrac{V_A}{۲} + \dfrac{V_A - rI}{۲S \| \dfrac{۱}{۲S}} = ۰ & (۱) \\ I = \dfrac{V_A}{۲} \Rightarrow V_A = ۲I & (۲) \end{cases}$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

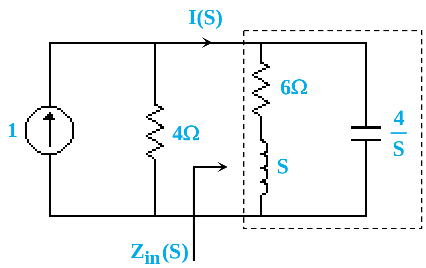
$$\frac{۲I - V_S}{۲} + I + \frac{۲I - rI}{۲S \| \dfrac{۱}{۲S}} = ۰$$

برای متناسب بودن I با V_S لازم است که جمله سوم در معادله بالا صفر شود (تا تمامی Sها از رابطه فوق که V_S و I را به یکدیگر مرتبط می‌سازد، حذف گردد و تناسب میان V_S و I چه در حوزه لاپلاس و چه در حوزه زمان برقرار گردد) و این امر با صفر شدن صورت جمله سوم امکان دارد.

$$\Rightarrow ۲I - rI = ۰ \Rightarrow \mathbf{r = ۲\Omega}$$

روش دوم: لازم به ذکر است که برای متناسب بودن جریان I با V_S باید V_A و V_B هم پتانسیل باشند (تا مدار مقاومتی شود). بنابراین $۲I = rI$ است و $r = ۲\Omega$ بدست می‌آید.

۲ـ گزینه «۳» با تحلیل مدار در حوزه فرکانس داریم:



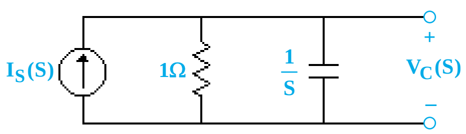
$$Z_{in}(S) = (۶+S) \| (\frac{۴}{S}) = \frac{۴S+۲۴}{S^۲+۶S+۴}$$

با تقسیم جریان برای مدار فوق داریم:

$$I(S) = \frac{۱ \times ۴}{۴ + \dfrac{۴S+۲۴}{S^۲+۶S+۴}} = \frac{S^۲+۶S+۴}{S^۲+۷S+۱۰}$$

$$I(S) = \frac{\frac{۱}{۳}}{S+۵} + \frac{-\frac{۴}{۳}}{S+۲} + ۱ \Rightarrow \mathbf{I(t) = \delta(t) + (\frac{۱}{۳}e^{-۵t} - \frac{۴}{۳}e^{-۲t})u(t)}$$

۳ـ گزینه «۴» مدار را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم.



$$I_S(t) = \cos(t+\varphi) = \cos t.\cos\varphi - \sin t.\sin\varphi$$

$$I_S(S) = \frac{S\cos\varphi}{S^۲+۱} - \frac{\sin\varphi}{S^۲+۱} = \frac{S\cos\varphi - \sin\varphi}{S^۲+۱}$$

$$V_C(S) = I_S(S) \times \frac{۱ \times \frac{۱}{S}}{۱+\frac{۱}{S}} = \frac{S\cos\varphi - \sin\varphi}{S^۲+۱} \times \frac{۱}{S+۱}$$

با تفکیک کسرهای $V_C(S)$ داریم:

$$V_C(S) = \frac{A}{S^۲+۱} + \frac{B}{S+۱} \quad , \quad B = \lim_{S \to -۱}(S+۱)V_C(S) \Rightarrow B = \frac{S\cos\varphi - \sin\varphi}{S^۲+۱}\Big|_{S=-۱} = \frac{-\cos\varphi - \sin\varphi}{۲}$$

برای عدم وجود پاسخ حالت گذرا که مربوط به عبارت $\frac{B}{S+۱}$ است، باید B صفر شود. بنابراین داریم:

$$\frac{-\cos\varphi - \sin\varphi}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi = -۱ \Rightarrow \varphi = ۱۳۵^\circ$$

۴ـ گزینه «۱» برای حل ساده‌تر مسأله از تحلیل در حوزه فرکانس استفاده می‌شود.

$$h(t) = \sqrt{۲}e^{-t}\cos(t+۴۵^\circ)u(t) = [e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t]u(t)$$

$$L[h(t)] = H(S) = \frac{S+۱}{(S+۱)^۲+۱} - \frac{۱}{(S+۱)^۲+۱} = \frac{S}{(S+۱)^۲+۱}$$

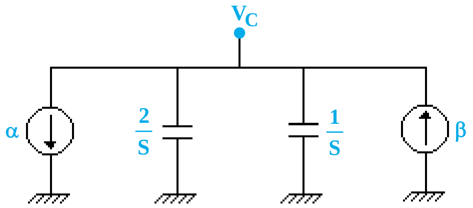
حال تابع مذکور را برای $S=j۲$ تحلیل می‌کنیم.

$$H(۲j)=\frac{۲j}{(۲j+۱)^۲+۱}=\frac{۲-j}{۵}=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵}j=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\angle -۲۶/۶^\circ$$

از طرفی می‌توان موج ورودی مدار را به صورت $۱۰\angle -۲۳/۴^\circ$ نوشت. حال داریم:

$$\text{پاسخ مدار}=H(۲j)\times ۱۰\angle -۲۳/۴^\circ=[\frac{۱}{\sqrt{۵}}\angle -۲۶/۵^\circ].[۱۰\angle -۲۳/۴^\circ] \Rightarrow \text{پاسخ مدار}=۲\sqrt{۵}\angle -۵۰^\circ=\mathbf{۴/۵\cos(۲t-۵۰^\circ)\ u(t)}$$

۵ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را پس از بسته شدن کلید و در حوزه فرکانس ترسیم کرده و سپس آن را تحلیل می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

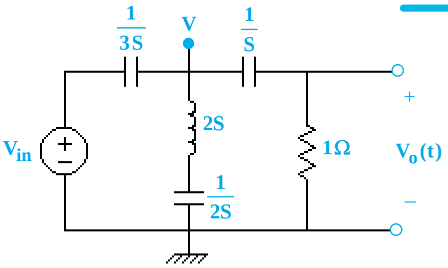


$$\frac{V_C}{\frac{۲}{S}}+\frac{V_C}{\frac{۱}{S}}+\alpha=\beta \Rightarrow \frac{SV_C}{۲}+SV_C=\beta-\alpha$$

$$\Rightarrow V_C\cdot\frac{۳}{۲}S=\beta-\alpha \Rightarrow V_C=\frac{۲}{۳S}(\beta-\alpha) \Rightarrow V_C(t)=\frac{۲}{۳}(\beta-\alpha)u(t)$$

$$V_C(t=۰^+)=۱v \Rightarrow ۱=\frac{۲}{۳}(\beta-\alpha)u(۰^+) \Rightarrow ۱=\frac{۲}{۳}(\beta-\alpha) \Rightarrow \beta=\frac{۳}{۲}+\alpha$$

۶ـ گزینه «۴» با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



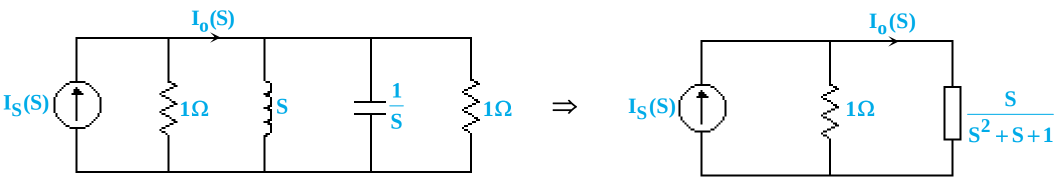
$$\frac{V-V_{in}}{\frac{۱}{۳S}}+\frac{V}{۲S+\frac{۱}{۲S}}+\frac{V}{۱+\frac{۱}{S}}=۰ \Rightarrow ۳S(V-V_{in})+\frac{۲SV}{۴S^۲+۱}+\frac{SV}{S+۱}=۰$$

$$\Rightarrow ۳S(۴S^۲+۱)(S+۱)(V-V_{in})+۲SV(S+۱)+SV(۴S^۲+۱)=۰ \Rightarrow V=V_{in}(\frac{۱۲S^۴+۱۲S^۳+۳S^۲+۳S}{۱۲S^۴+۱۶S^۳+۵S^۲+۶S})$$

$$V_o=V\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}}=\frac{VS}{S+۱} \Rightarrow V_o=V_{in}(\frac{۱۲S^۴+۱۲S^۳+۳S^۲+۳S}{۱۲S^۴+۱۶S^۳+۵S^۲+۶S})\times\frac{S}{S+۱}$$

$$V_o=V_{in}(\frac{۳S(۱+۴S^۲)(S+۱)}{(۱۲S^۳+۱۶S^۲+۵S+۶)S})\times\frac{S}{S+۱} \Rightarrow \mathbf{\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{۳S(۱+۴S^۲)}{۱۲S^۳+۱۶S^۲+۵S+۶}}$$

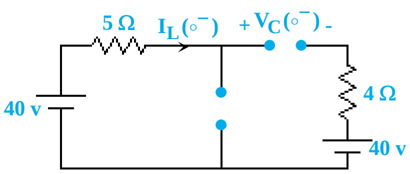
۷ـ گزینه «۴» با ترسیم و ساده‌سازی مدار در حوزه فرکانس داریم:



$$\Rightarrow I_o(S)=I_S(S)\times\frac{۱}{۱+\frac{S}{S^۲+S+۱}} \Rightarrow I_o(S)[S^۲+۲S+۱]=I_S(S)[S^۲+S+۱]$$

$$\Rightarrow \mathbf{\frac{d^۲I_o(t)}{dt^۲}+۲\frac{dI_o(t)}{dt}+I_o(t)=\frac{d^۲I_S(t)}{dt^۲}+\frac{dI_S(t)}{dt}+I_S(t)}$$

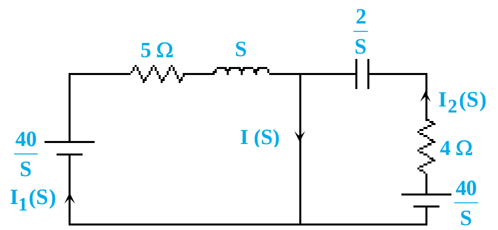
۸ـ گزینه «۱» **روش اول:** ابتدا باید مدار در $t=۰^-$ تحلیل شود. در این حالت کلید باز بوده و سلف با اتصال کوتاه و خازن با مدار باز مدل می‌شود.



$$V_C(۰^\pm)=۴۰-۴۰=۰ \quad \text{و} \quad I_L(۰^\pm)=۰$$

در ادامه حل، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و در گره بالای مدار KCL می‌زنیم.

$$I(S)=I_1(S)+I_2(S)=\frac{\frac{40}{S}}{(S+5)}+\frac{\frac{40}{S}}{4+\frac{2}{S}}=\frac{40}{S(S+5)}+\frac{40}{S(4+\frac{2}{S})}=\frac{40}{S(S+5)}+\frac{40}{4S+2}$$

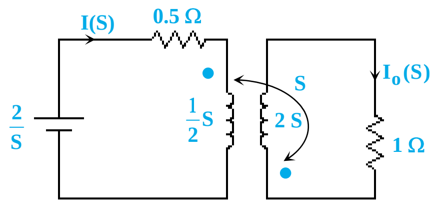


$$\Rightarrow\ I(S)=\frac{8}{S}-\frac{8}{S+5}+\frac{10}{S+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{I(t)=L^{-1}[I(S)]=8(1-e^{-5t})+10\,e^{-0.5t}}$$

روش دوم: با توجه به اینکه $I(0^+)=10\,A$ است، با تست گزینه‌ها در زمان $t=0$ گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. همچنین با توجه به اینکه $I(\infty)=8A$ است، با تست گزینه‌های باقیمانده در این زمان، فقط گزینه (۱) به عنوان جواب انتخاب می‌شود.

۹ــ گزینه «۱» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:



$$2SI_0(S)+SI(S)+1\times I_0(S)=0$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

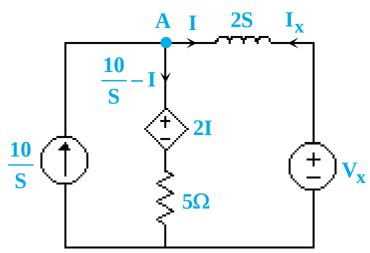
$$0.5I(S)+\frac{1}{2}SI(S)+SI_0(S)=\frac{2}{S}\ \Rightarrow\ \begin{cases}I_0(S)[2S+1]+SI(S)=0\\ SI_0(S)+I(S)[\frac{1}{2}+\frac{S}{2}]=\frac{2}{S}\end{cases}$$

حال با روش کرامر، دستگاه بالا را حل کرده و پاسخ $I_0(S)$ را بدست می‌آوریم.

$$I_0(S)=\frac{\begin{vmatrix}0 & S\\ \frac{2}{S} & \frac{1}{2}+\frac{S}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2S+1 & S\\ S & \frac{1}{2}+\frac{S}{2}\end{vmatrix}}=\frac{-\frac{2}{S}\times S}{(2S+1)(\frac{1}{2}+\frac{S}{2})-S^2}=\frac{-2}{S+\frac{1}{2}+S^2+\frac{S}{2}-S^2}=\frac{-2}{1.5(S+\frac{1}{3})}\ \Rightarrow\ \mathbf{I_0(t)=-\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}t}}$$

۱۰ــ گزینه «۲»

روش اول: یک منبع ولتاژ به دو سر مقاومت a و b که جریان I_x را به مدار تزریق می‌کند، متصل می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره A، جریان شاخه وسط بدست می‌آید. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

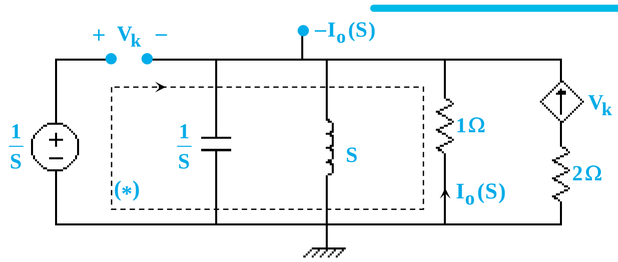


$$(2S)I_x+2I+(\frac{10}{S}-I)\times 5=V_x$$

$$\xrightarrow{I=-I_x}\ (2S)\times I_x-2I_x+(\frac{10}{S})\times 5+5I_x=V_x\ \Rightarrow\ \mathbf{V_x=\underbrace{(2S+3)}_{Z_{th}}I_x+\underbrace{\frac{50}{S}}_{V_{th}}}$$

روش دوم: با تست مدار در $S=\infty$، به علت مدار باز بودن سلف ورودی، مقدار Z_{th} باید برابر ∞ شود، که این نکته فقط در گزینه (۲) صادق است.

۱۱ــ گزینه «۲»



برای محاسبه پاسخ در مدار به جای منبع $V_S(t)$ تابع $u(t)$ را قرار می‌دهیم. حال شرایط اولیه را صفر فرض کرده و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.

با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$-\frac{I_0(S)}{1}+\frac{-I_0(S)}{S}+\frac{-I_0(S)}{\frac{1}{S}}=V_k\ \Rightarrow\ I_0(S)[-1-S-\frac{1}{S}]=V_k\ \Rightarrow\ I_0(S)=V_k[\frac{1}{-1-S-\frac{1}{S}}]\qquad (1)$$

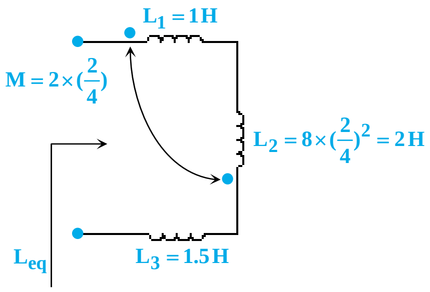
با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$-\frac{1}{S}+V_k-I_o(S)\times 1=0 \Rightarrow V_k=I_o(S)+\frac{1}{S} \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

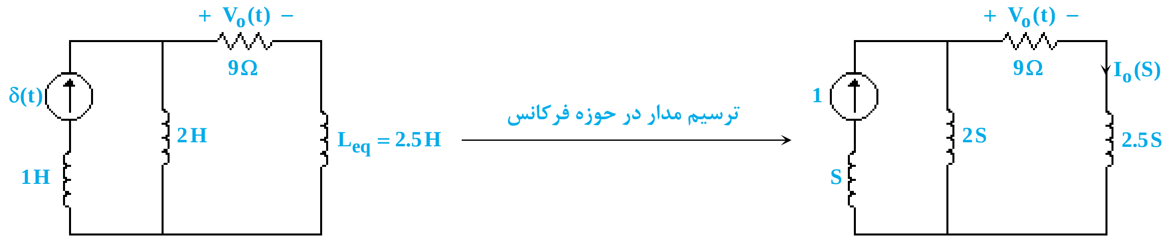
$$I_o(S)=[I_o(S)+\frac{1}{S}][\frac{1}{-1-S-\frac{1}{S}}] \Rightarrow I_o(S)=\frac{-1}{S^2+2S+1}=\frac{-1}{(S+1)^2} \Rightarrow I_o(t)=-te^{-t}u(t)$$

۱۲ـ گزینه «۱» برای محاسبه پاسخ ضربه، منبع جریان $I_S(t)$ را به صورت تابع $\delta(t)$ فرض می‌کنیم. قبل از ترسیم مدار در حوزه فرکانس، ابتدا سلف‌های سمت راست مدار را معادل‌گذاری می‌کنیم. ابتدا سلف $8H$ را با نسبت تبدیل ترانس به سمت اولیه منتقل می‌کنیم. دقت کنید که با توجه به نقطه‌های ترانس بعد از انتقال سلف $8H$ به سمت اولیه، نقطه مربوط به سلف $8H$ باید برعکس شده و در پایین آن قرار گیرد. حال داریم:



$$L_{eq}=L_1+L_2-2M+L_3=1+2-2\times 1+1.5=2.5H$$

حال با جایگذاری L_{eq} در مدار داریم:

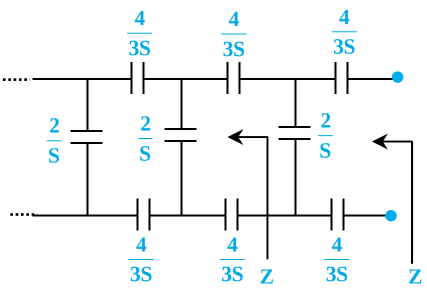


با استفاده از قانون تقسیم جریان، مقدار جریان $I_o(S)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$I_o(S)=1\times\frac{2S}{9+2.5S+2S}=\frac{2S}{4.5S+9} \Rightarrow I_o(S)=\frac{4.5S}{4.5S+9}\times\frac{1}{2.25}=\frac{1}{2.25}[1-\frac{2}{S+2}] \Rightarrow I_o(S)=\frac{1}{2.25}[\delta(t)-2e^{-2t}u(t)]$$

$$V_o(t)=9\times I_o(t)=\frac{9}{2.25}[\delta(t)-2e^{-2t}u(t)] \Rightarrow \mathbf{V_o(t)=4\delta(t)-8e^{-2t}u(t)}$$

۱۳ـ گزینه «۴» برای حل این مثال، باید شبکه‌های نامتناهی موجود در مدار را با امپدانس‌های معادلشان جایگزین کنیم. بدین ترتیب ابتدا امپدانس معادل شبکه خازنی سمت چپ را محاسبه می‌کنیم. اگر این قسمت از مدار را در فضای لاپلاس مدل کنیم، به مدار روبرو می‌رسیم:



حال با استفاده از مدار معادل ترسیم شده داریم:

$$Z=(Z\,||\,\frac{2}{S})+2\times\frac{4}{3S}=\frac{Z\times\frac{2}{S}}{Z+\frac{2}{S}}+\frac{8}{3S}=\frac{2Z}{SZ+2}+\frac{8}{3S}\xrightarrow{\times 3S(SZ+2)} 3S^2Z^2+6SZ=6SZ+8SZ+16 \Rightarrow 3S^2Z^2-8SZ-16=0$$

$$\Rightarrow Z=\frac{8S\pm\sqrt{64S^2+4\times 3S^2\times 16}}{6S^2}=\frac{8S\pm 16S}{6S^2}\Rightarrow\begin{cases}Z=\frac{4}{S}\\ Z=-\frac{8}{3S}\end{cases}$$

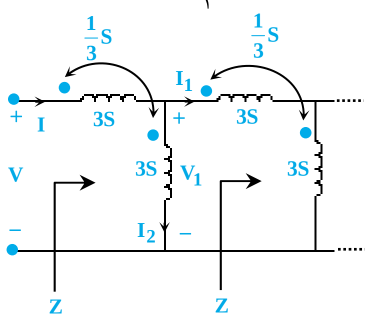
از مقادیر بدست آمده برای Z ، فقط مقدار $Z=\frac{4}{S}$ قابل قبول است و این یعنی شبکه نامتناهی سمت چپ، معادل با یک خازن $\frac{1}{4}$ فارادی می‌باشد.

حال به سراغ شبکه سلفی مطابق شکل زیر می‌رویم:

در اینجا به دلیل وجود تزویج میان سلفها، محاسبه امپدانس معادل کمی پیچیده‌تر از حالت قبلی می‌باشد.

با توجه به نامتناهی بودن مدار برای شکل روبرو می‌توان نوشت:

$$V=ZI \quad , \quad V_1=ZI_1$$



از طرفی داریم:

$$V_1=\frac{1}{3}SI+3SI_2 \qquad V=3SI+\frac{1}{3}SI_2+\frac{1}{3}SI+3SI_2=\frac{10}{3}SI+\frac{10}{3}SI_2$$

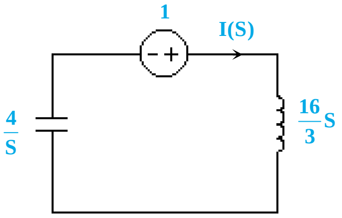
حال با توجه به رابطه $I=I_1+I_2$ و روابط فوق می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}V_1&=ZI_1=Z(I-I_2)\\ V_1&=\frac{1}{3}SI+3SI_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow Z(I-I_2)=\frac{1}{3}SI+3SI_2\Rightarrow\left(Z-\frac{1}{3}S\right)I=(Z+3S)I_2\Rightarrow I_2=\frac{Z-\frac{1}{3}S}{Z+3S}I$$

در نهایت داریم:

$$V=\frac{10}{3}SI+\frac{10}{3}SI_2=\frac{10}{3}SI\times\left[1+\frac{Z-\frac{1}{3}S}{Z+3S}\right]=ZI\Rightarrow\frac{10}{3}S\times\left[1+\frac{Z-\frac{1}{3}S}{Z+3S}\right]=Z\xrightarrow{\times(Z+3S)}Z^2+3SZ=\frac{10}{3}SZ+10S^2+\frac{10}{3}SZ-\frac{10}{9}S^2$$

$$\Rightarrow Z^2-\frac{11}{3}SZ-\frac{80}{9}S^2=0\ \Rightarrow\ Z=\frac{\frac{11}{3}S\pm\sqrt{\frac{121}{9}S^2+4\times\frac{80}{9}S^2}}{2}=\frac{\frac{11}{3}S\pm\frac{21}{3}S}{2}\ \Rightarrow Z=\begin{cases}\frac{16}{3}S\\ -\frac{5}{3}S\end{cases}$$



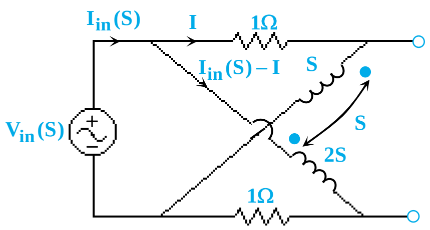
مشخصاً از دو مقدار بدست آمده برای Z فقط مقدار اول یعنی $\frac{16}{3}S$ قابل قبول می‌باشد و لـذا ایـن شبکه نامتناهی همچون یک سلف $\frac{16}{3}$ هانری رفتار می‌کند. اکنون با داشـتن مقـدار امپـدانس‌هـای معادل دو شبکه نامتناهی می‌توان کل مدار را به راحتی مدل کرد:

با یک KVL ساده در فضای S داریم:

$$1=\left(\frac{16}{3}S+\frac{4}{S}\right)\times I(S)\ \Rightarrow\ I(S)=\frac{1}{\frac{16}{3}S+\frac{4}{S}}=\frac{\frac{3}{16}S}{S^2+\frac{3}{4}}\ \Rightarrow\ \mathbf{i(t)=\frac{3}{16}\cos(\sqrt{\frac{3}{4}}\,t)}$$

روش ساده‌تر حل این تست جایگزینی سلف‌های تزویج شده با مدار معادل T آنها و استفاده از روش متداول بـرای محاسـبه سـلف معـادل مـدار مـی‌باشـد؛ این روش به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۱۴ـ گزینه «۱» با نوشتن KVL در حلقه بالای مدار داریم:



$$V_{in}(S)=I+IS+S(I_{in}(S)-I)\Rightarrow\ V_{in}(S)=I+I_{in}(S).S \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه پایین مدار داریم:

$$V_{in}(S)=(2S+1)(I_{in}(S)-I)+SI\Rightarrow\ V_{in}(S)=-I(S+1)+I_{in}(S)(2S+1) \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V_{in}(S)=-(V_{in}(S)-SI_{in}(S))(S+1)+I_{in}(S)(2S+1)\ \Rightarrow\ \mathbf{H(S)=\frac{V_{in}(S)}{I_{in}(S)}=\frac{S^2+3S+1}{S+2}}$$

۱۵ـ گزینه «۴» ابتدا $H(j\omega)$ را با توجه به فرکانس موج ورودی محاسبه می‌کنیم:

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=4}=H(j4)=\frac{17(j4+4)}{(j4+1)(j20+12)}=\frac{68(1+j)}{-68+j68}=\frac{1+j}{-1+j}=-j\Rightarrow H(\rho\angle\theta)=1\angle-90^\circ$$

حال پاسخ خروجی را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

(پاسخ خروجی) $=H(\rho\angle\theta)\times$ (تابع ورودی)

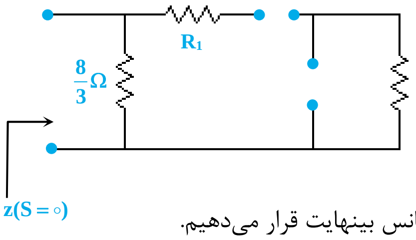
$$\Rightarrow\ y(\rho\angle\theta)=(2\angle-30^\circ)\times(1\angle-90^\circ)=2\angle-120^\circ\Rightarrow\ \mathbf{y(t)=2\cos(4t-120^\circ)}$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل نهم

۱ـ گزینه «۲» با توجه به اطلاعات داده شده پیرامون صفرها و قطب‌های امپدانس $Z(S)$، تابع $Z(S)$ به صورت زیر است:

$$Z(S)=k\frac{(S+۲)(S+۴)}{(S+۱)(S+۳)}$$

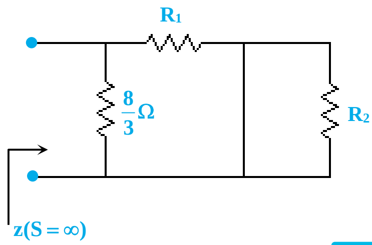
در صورتی که فرکانس مدار صفر باشد، آنگاه مقدار S را در تابع $Z(S)$ برابر صفر قرار می‌دهیم و حاصل را با امپدانس بدست آمده از مدار در فرکانس صفر برابر قرار می‌دهیم.



$$Z(S=۰)=\frac{k(۰+۲)(۰+۴)}{(۰+۱)(۰+۳)}=\frac{۸}{۳}k$$

$$Z(S=۰)=\frac{۸}{۳}\Omega \Rightarrow \frac{۸}{۳}k=\frac{۸}{۳} \Rightarrow k=۱$$

حال فرکانس $S=\infty$ را در تابع $Z(S)$ قرار داده و مقدار آن را مساوی امپدانس بدست آمده از مدار در فرکانس بینهایت قرار می‌دهیم.



$$z(S=\infty)=\lim_{S\to\infty}\frac{k(S+۲)(S+۴)}{(S+۱)(S+۳)}=k=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۳}\parallel R_۱=۱ \Rightarrow \mathbf{R_۱=\frac{۸}{۵}\Omega}$$

۲ـ گزینه «۲» با توجه به دیاگرام صفر و قطب، برای امپدانس ورودی تابع مقابل پیشنهاد می‌شود:

$$Z=k.\frac{(S+j)(S-j)}{(S+۱)(S+۲)}=\frac{k(S^۲+۱)}{(S+۱)(S+۲)}$$

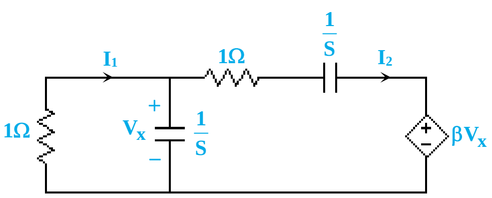
در صورت اتصال منبع جریان ۱A در مدار که حاوی فرکانس صفر است، ولتاژ $\frac{۱}{۲}$ ولت اندازه‌گیری شده است. بنابراین مقاومت یا امپدانس تونن از دو سر مذکور را باید با تابع امپدانس ورودی حدس زده شده، در فرکانس صفر یعنی $S=۰$ برابر قرار داد.

$$Z_{th}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲}=\frac{k(۰+۱)}{(۰+۱)(۰+۲)} \Rightarrow k=۱ \Rightarrow \mathbf{Z=\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S+۲)}}$$

۳ـ گزینه «۲» برای بدست آوردن پهنای باند مدار، باید معادله مشخصه مدار را بدست آوریم. حال ابتدا ماتریس ادمیتانس مدار را به روش نظری محاسبه می‌کنیم.

$$Y=\begin{bmatrix} S+\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲S}\end{bmatrix},\ \det[Y]=۰ \Rightarrow (S+\frac{۱}{۲})(\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲S})-\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow ۶S^۲+۴S+۱=۰ \Rightarrow S^۲+\frac{۲}{۳}S+\frac{۱}{۶}=۰,\ \mathbf{BW=۲\alpha=\frac{۲}{۳}=۰/۶۷(\frac{rad}{sec})}$$

۴ـ گزینه «۳» برای بدست آوردن معادله مشخصه مدار باید ماتریس امپدانس حلقه‌ها با نوشتن دو KVL در مدار بدست آید. با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:



$$I_۱+(I_۱-I_۲)\frac{۱}{S}=۰$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$(۱+\frac{۱}{S})I_۲+\beta V_x+\frac{۱}{S}(I_۲-I_۱)=۰$$

با دقت در مدار دیده می‌شود که $V_x=\frac{۱}{S}(I_۱-I_۲)$ است و با جایگذاری V_x در معادلات بالا داریم:

$$\begin{cases} I_۱(۱+\frac{۱}{S})-I_۲(\frac{۱}{S})=۰ \\ I_۱[\frac{\beta}{S}-\frac{۱}{S}]+I_۲[۱+\frac{۲}{S}-\frac{\beta}{S}]=۰\end{cases} \Rightarrow Z=\begin{bmatrix} ۱+\frac{۱}{S} & -\frac{۱}{S} \\ \frac{\beta}{S}-\frac{۱}{S} & ۱+\frac{۲}{S}-\frac{\beta}{S}\end{bmatrix},\ \det[Z]=۰ \Rightarrow (۱+\frac{۱}{S})(۱+\frac{۲}{S}-\frac{\beta}{S})+\frac{۱}{S}(\frac{\beta}{S}-\frac{۱}{S})=۰$$

در نتیجه داریم:

$$S^۲+(۳-\beta)S+۱=۰$$

برای برقراری حالت بی‌اتلاف، باید ضریب S صفر شود تا ریشه‌ها روی محور $j\omega$ قرار گیرد.

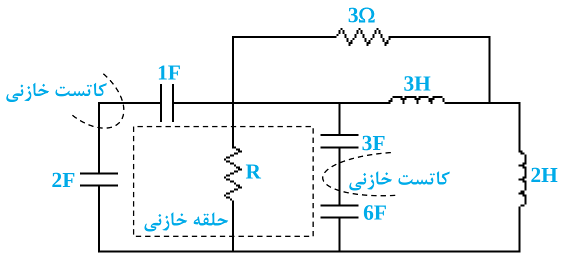
$$۳-\beta=۰ \Rightarrow \beta=۳$$

۵ـ گزینه «۴» با توجه به حضور یک LC سری در مدار $(1H,1F)$، درصورت رزونانس LC مذکور، V_2 صفر می‌شود. بنابراین تابع انتقال دارای عبارت (S^2+1) در صورت کسر است. همچنین با رزونانس LC موازی نیز V_2 صفر می‌شود. بنابراین عبارت $(\frac{1}{2}S+\frac{1}{LS})$ یا $(S^2+\frac{2}{L})$ (که معادل با ادمیتانس شاخه‌ی LC موازی است) باید در صورت کسر باشد. با توجه به موارد فوق صورت کسر به صورت مقابل است:

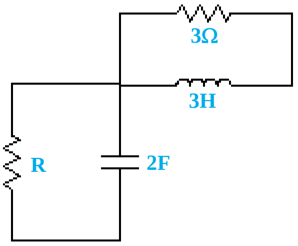
$$(S^2+1)(S^2+\frac{2}{L})=S^4+S^2(1+\frac{2}{L})+\frac{2}{L}$$

با توجه به چندجمله‌ای بالا باید ضرایب توان‌های فرد S در صورت صفر باشد؛ لذا $a=b=0$ است.

۶ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را در زمان بسته بودن کلیدها تحلیل می‌کنیم. در این حالت ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی (سلف و خازن) در مدار وجود دارد. با توجه به وجود یک حلقه خازنی از این تعداد یک واحد کم می‌شود. لذا مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی است. همچنین با توجه به وجود دو کاتست خازنی، مدار دارای دو فرکانس طبیعی صفر بوده و بنابراین دارای ۳ فرکانس طبیعی غیرصفر است.



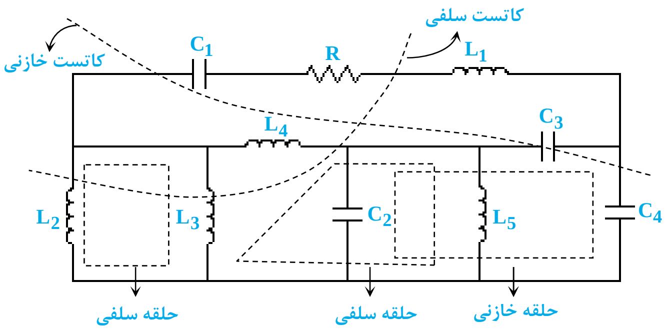
با توجه به اطلاعات مدار، باید یکی از فرکانس‌های طبیعی $\frac{1}{10}$ برابر تعداد فرکانس‌های غیرصفر در حالت کلید بسته باشد. لذا این فرکانس غیرصفر برابر $\frac{3}{10}$ است. حال در حالت باز بودن کلیدها، مدار تحلیل می‌شود. لازم به ذکر است که خازن‌های ۱F و ۲F در سمت چپ به همراه سلف ۲H در سمت راست مدار، در این حالت بی‌اثر هستند. حال یکی از فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار، مربوط به مدار RC موازی است.



$$S=\frac{-1}{RC}\ \Rightarrow\ \frac{1}{RC}=\frac{3}{10}\ \Rightarrow\ \frac{1}{R\times 2}=\frac{3}{10}\ \Rightarrow\ \mathbf{R=\frac{5}{3}\Omega}$$

۷ـ گزینه «۴» شبکه‌هایی که تنها از عناصر پسیو R، L و C تشکیل شده‌اند، شبکه‌هایی ذاتاً پایدار هستند؛ اگر این شبکه‌ها دارای فرکانس‌های موهومی روی محور $j\omega$ باشند، ورودی‌هایی که فرکانسی مشابه فرکانس‌های موهومی مدار دارند، خروجی مدار را ناپایدار خواهند کرد. از طرف دیگر در این نوع شبکه‌ها شرایط اولیه مدار می‌تواند در مقدار ماندگار پاسخ سینوسی مدار تأثیرگذار باشد. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) غلط است. علاوه بر این پاسخ کامل شبکه دارای جزئی ناشی از ورودی بوده و این مسأله خطی بودن پاسخ کامل شبکه نسبت به شرایط اولیه را از بین می‌برد. بنابراین گزینه (۳) نیز غلط بوده و گزینه (۴) پاسخ تست است.

۸ـ گزینه «۲» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها در مدار، تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی ۹ عدد خواهد بود. با توجه به وجود یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی از این تعداد ۲ واحد کم می‌شود. لذا مدار از مرتبه ۷ بوده و دارای ۷ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود یک کاتست خازنی و دو حلقه سلفی مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی صفر نیز می‌باشد. بنابراین در کل مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی غیرصفر و ۳ فرکانس طبیعی صفر است.



۹ـ گزینه «۱» ابتدا به جای عبارت S مقدار $j\omega$ را جایگزین کرده و بعد مقدار $Z_{in}(j\omega)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس قسمت موهومی Z_{in} را بدست آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا فرکانس تشدید محاسبه شود.

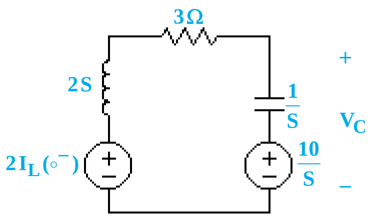
$$Z_{in}(j\omega)=\frac{j\omega+\alpha}{(j\omega)^2+4(j\omega)+8}=\frac{\alpha+j\omega}{8-\omega^2+j4\omega}\ \Rightarrow\ Im(Z_{in})=-\frac{(4\alpha\omega-\omega(8-\omega^2))}{(8-\omega^2)^2+(4\omega)^2}$$

$$Im(Z_{in})=0\ \Rightarrow\ 4\alpha\omega-\omega(8-\omega^2)=0\ \Rightarrow\ 4\alpha-8+\omega^2=0\ \Rightarrow\ \omega^2=8-4\alpha$$

در صورتی که فرکانس تشدید حقیقی باشد، باید $\omega^2>0$ باشد؛ لذا داریم:

$$8-4\alpha>0\ \Rightarrow\ 8>4\alpha\ \Rightarrow\ \alpha<2$$

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا با فرض وجود شرایط اولیه، پاسخ ورودی صفر را برای $V_C(t)$ بدست می‌آوریم:



$$I=\frac{2I_L(0^-)-\frac{10}{S}}{2S+3+\frac{1}{S}}\quad,\quad V_C(S)=\frac{1}{S}I+\frac{10}{S}\ \Rightarrow\ V_C(S)=\frac{2I_L(0^-)-\frac{10}{S}}{2S^2+3S+1}+\frac{10}{S}$$

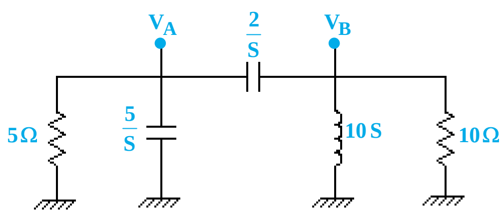
$$\Rightarrow\ V_C(S)=\frac{I_L(0^-)S-5}{S(S+\frac{1}{2})(S+1)}+\frac{10}{S}$$

$$\Rightarrow V_C(S)=\frac{2I_L(0^-)+20}{S+\frac{1}{2}}+\frac{-2I_L(0^-)-10}{S+1}+\frac{-10}{S}+\frac{10}{S}\ \Rightarrow V_C(S)=\frac{2I_L(0^-)+20}{S+\frac{1}{2}}+\frac{-2I_L(0^-)-10}{S+1}$$

برای ظاهر شدن فقط یک فرکانس طبیعی باید صورت یکی از کسرهای بالا صفر شود.

$$\begin{cases}2I_L(0^-)+20=0 & \Rightarrow I_L(0^-)=-10\,A\\ -2I_L(0^-)-10=0 & \Rightarrow I_L(0^-)=-5A\end{cases}$$

۱۱ـ گزینه «۴» برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی متغیر V_A، ابتدا منابع مستقل مدار را غیرفعال کرده و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.
حال در ادامه با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$\frac{V_A}{5}+\frac{V_A}{\frac{5}{S}}+\frac{V_A-V_B}{\frac{2}{S}}=0$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_B}{10}+\frac{V_B}{10S}+\frac{V_B-V_A}{\frac{2}{S}}=0$$

اگر روابط بالا را به صورت ماتریسی بنویسیم، داریم:

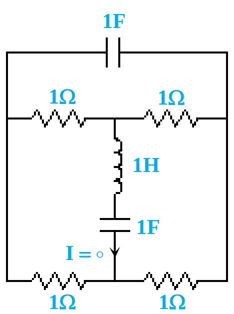
$$\begin{bmatrix}7S+2 & -5S\\ -5S & 5S+1+\frac{1}{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_A\\ V_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ V_A=\frac{\begin{vmatrix}0 & -5S\\ 0 & 5S+1+\frac{1}{S}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7S+2 & -5S\\ -5S & 5S+1+\frac{1}{S}\end{vmatrix}}\ \Rightarrow\ V_A[(7S+2)(5S+1+\frac{1}{S})-(-5S)^2]=0$$

بنابراین معادله مشخصه مربوط به متغیر V_A به صورت زیر است:

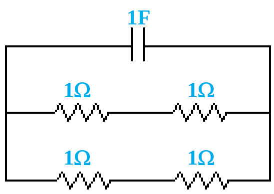
$$(7S+2)(5S+1+\frac{1}{S})-(-5S)^2=0\ \Rightarrow 10S^3+17S^2+9S+2=0$$

$$\Rightarrow\ S_1=-1\quad,\quad S_2\ \text{و}\ S_3\simeq -0/35\pm j0/28$$

۱۲ـ گزینه «۴» ابتدا دو خازن بالا و پایین مدار را موازی می‌کنیم و به جای آن یک خازن 1F در بالا قرار می‌دهیم. حال در صورتی که شرایط اولیه مدار توسط خازن 1F بالای مدار تعیین شود، آنگاه پل وتستون در مدار حاکم است و شاخه شامل سلف 1H و خازن 1F حذف می‌شود. لذا داریم:

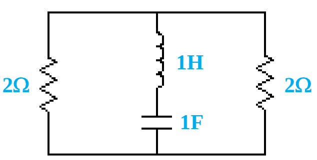


$\Rightarrow$

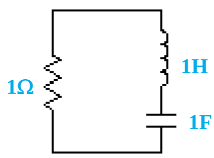


$$\Rightarrow\ S=\frac{-1}{RC}=\frac{-1}{(2\,||\,2)\times 1}=-1$$

از طرفی اگر شرایط اولیه مدار توسط LC سری تعیین شود، آنگاه با توجه به تقارن مدار، خازن 1F بالا دارای ولتاژ صفر است و جریان آن نیز صفر خواهد بود؛ لذا داریم:



$\Rightarrow$



فرکانس‌های طبیعی این مدار از حل معادله مشخصه آن حاصل می‌شود:

$$S^2+2\alpha s+\omega_0^2=0 \quad , \quad 2\alpha=\frac{R}{L}=\frac{1}{1}=1 \quad , \quad \omega_0^2=\frac{1}{LC}=1 \ \Rightarrow\ S^2+S+1=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} S_1=-\frac{1}{2}+j0/86 \\ S_2=-\frac{1}{2}-j0/86 \end{cases}$$

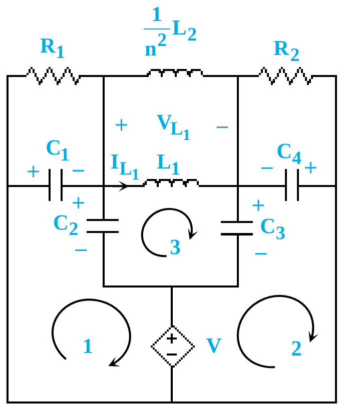
بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار به صورت (-1) , $(-\frac{1}{2}, \pm j0/86)$ می‌باشند.

۱۳ـ گزینه «۱» می‌دانیم که با داشتن ماتریس حالت سیستم یا A، می‌توان فرکانس‌های طبیعی سیستم را از رابطه $\det[SI-A]=0$ محاسبه کرد و با توجه به نوع ریشه‌های بدست آمده، فرم پاسخ مدار را حدس زد. حال داریم:

$$[SI-A]=S\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S&0\\0&S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S&2\\-1&S+3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \det\begin{bmatrix}S&2\\-1&S+3\end{bmatrix}=0\ \Rightarrow\ S(S+3)+2=0\ \Rightarrow\ S^2+3S+2=0\ \Rightarrow\ S_1=-1 \quad S_2=-2$$

با توجه به ریشه‌های بدست آمده فرم پاسخ به صورت حالت فوق میرا است. بنابراین فقط گزینه «۱» صحیح است.



۱۴ـ گزینه «۱» در صورتی که $V=V_{L_1}$ باشد، به ترتیب در حلقه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

حلقه ۱ $\Rightarrow V_{C_1}+V_{C_2}+V_{L_1}=0 \qquad (1)$

حلقه ۲ $\Rightarrow V_{L_1}+V_{C_3}+V_{C_4}=0 \qquad (2)$

حلقه ۳ $\Rightarrow V_{C_2}-V_{C_3}-V_{L_1}=0 \qquad (3)$

از (۱) داریم: $V_{L_1}=-(V_{C_1}+V_{C_2})$

که اگر در (۳) جایگزین کنیم، داریم:

$$V_{C_2}-V_{C_3}+V_{C_1}+V_{C_2}=0\Rightarrow 2V_{C_2}-V_{C_3}+V_{C_1}=0 \quad (4)$$

و از (۲) داریم: $V_{L_1}=-(V_{C_3}+V_{C_4})$

که اگر در (۳) جایگزین کنیم: $V_{C_2}-V_{C_3}+V_{C_3}+V_{C_4}=0\Rightarrow V_{C_2}+V_{C_4}=0 \qquad (5)$

از (۴) و (۵) دو وابستگی خطی بین ولتاژ خازن‌ها به دست می‌آید. بنابراین از تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی ۲ واحد کم کرده و داریم:

$V=V_L$ تعداد فرکانس‌های طبیعی با $\Rightarrow 6-2=4$

در صورتی که $V=I_{L_1}$ باشد، با نوشتن KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

حلقه ۱ $\Rightarrow V_{C_1}+V_{C_2}+I_{L_1}=0$

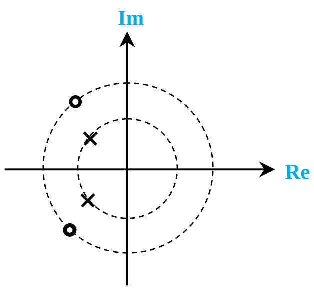
حلقه ۲ $\Rightarrow I_{L_1}+V_{C_3}+V_{C_4}=0$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود وابستگی خطی بین متغیرهای حالت یعنی ولتاژهای خازن‌ها و جریان سلف L_1 وجود دارد که در این صورت ۲ واحد از تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی باید کم شود تا تعداد فرکانس‌های طبیعی بدست آید: $V=I_L$ تعداد فرکانس‌های طبیعی با $\Rightarrow 6-2=4$

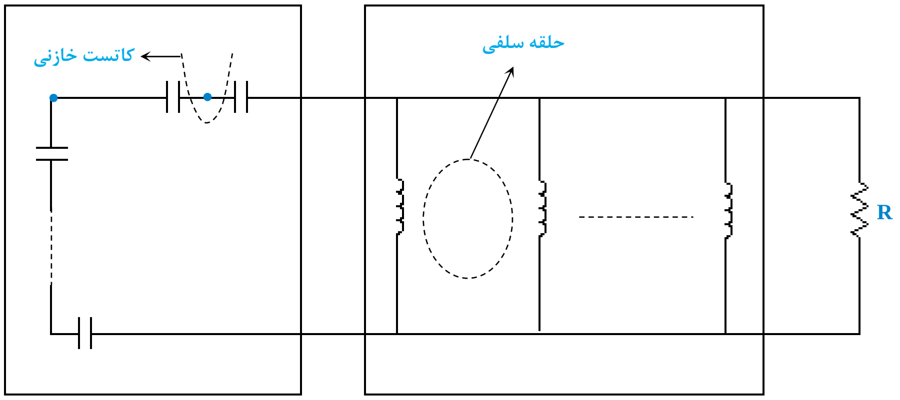
درجه مدار در هر دو حالت برابر است و با تغییر منبع وابسته تغییری نمی‌کند. پس گزینه (۱) صحیح است.

۱۵ـ گزینه «۱» با توجه به غیرصفر بودن نمودار در $\omega=0$، تابع شبکه دارای صفر در $S=0$ نمی‌باشد و با توجه به وجود یک ماکزیمم محدود در نمودار، تابع شبکه دارای یک جفت قطب مزدوج و مختلط در سمت چپ محور $j\omega$ است. همچنین وجود یک مینیمم غیرصفر در نمودار بیانگر وجود یک جفت صفر مزدوج مختلط در سمت چپ محور $j\omega$ است.

با دقت در نمودار دیده می‌شود که در $\omega=\infty$ اندازه تابع شبکه یک عدد غیرصفر و محدود بوده و لذا درجه صورت و مخرج یا به عبارتی تعداد صفرها و قطب‌ها برابر است. با توجه به موارد فوق گزینه «۱» صحیح است. نمودار قطب و صفر $H(S)$ نیز به شکل روبرو می‌باشد:

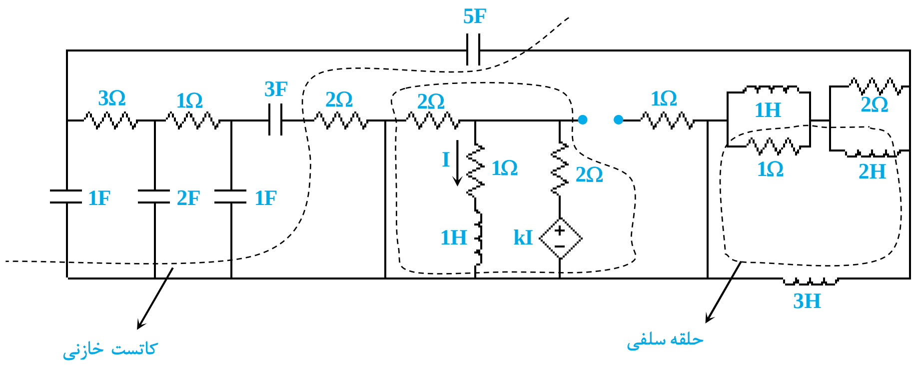


۱۶ـ گزینه «۲» با قرار دادن مدار معادل شبکه‌ها داریم:

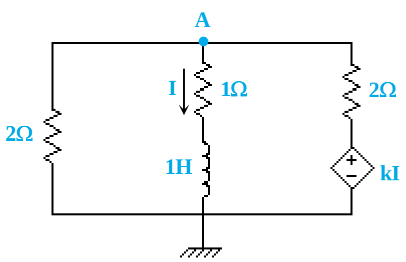


در قسمت سمت چپ مدار به تعداد $m-1$ کاتست خازنی و در قسمت سمت راست مدار به تعداد $n-1$ حلقه سلفی وجود دارد. بنابراین مدار دارای $m+n-2$ فرکانس طبیعی صفر است.

۱۷ـ گزینه «۱» برای بدست آوردن تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر ابتدا منابع ولتاژ را اتصال کوتاه و منبع جریان را مدار باز می‌کنیم:



همان‌گونه که می‌بینیم، یک حلقه سلفی و یک کاتست خازنی وجود دارد که این دو، دو فرکانس طبیعی صفر می‌سازند. حال ببینیم به ازای چه k ای می‌توانیم فرکانس طبیعی صفر دیگری داشته باشیم:



در اینجا سعی می‌کنیم معادله مشخصه I را یافته و فرکانس طبیعی این قسمت از مدار را محاسبه کنیم:

$$V_A = I\times 1 + S\times I = (S+1)I$$

$$KCL(A): \frac{V_A}{2} + I + \frac{V_A - kI}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(S+1)I}{2} + I + \frac{(S+1-k)I}{2} = 0 \Rightarrow SI + (2 - \frac{k}{2})I = 0$$

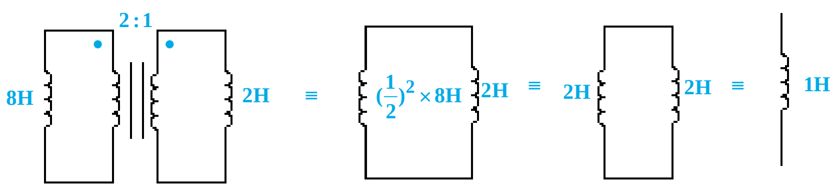
برای اینکه فرکانس صفر داشته باشیم، باید $SI = 0$ باشد؛ بنابراین:

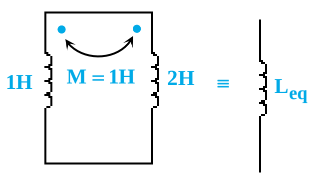
$$2 - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow k = 4$$

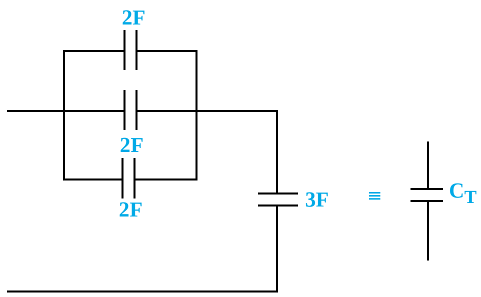
به ازای $k = 4$ مدار ۳ فرکانس طبیعی صفر دارد. بنابراین گزینه‌ی «۱» صحیح است.

۱۸ـ گزینه «۴»

ابتدا برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر، منابع مدار را غیرفعال کرده و سلفها و خازن‌های سری یا موازی را ساده می‌کنیم.



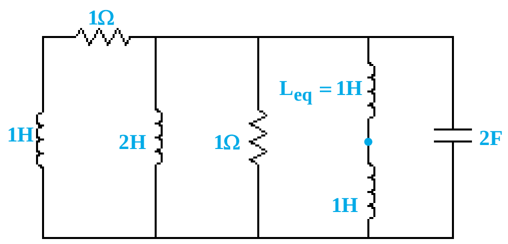




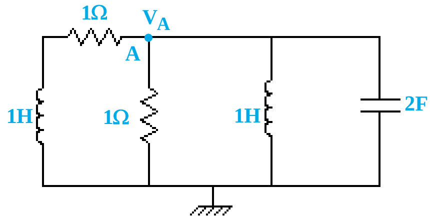
$$L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{2-1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1H$$

$$C_T = \frac{(2+2+2)\times 3}{(2+2+2)+3} = 2F$$

حال مدار زیر را داریم:



با ساده‌سازی سلف‌های سری و موازی در نهایت خواهیم داشت:

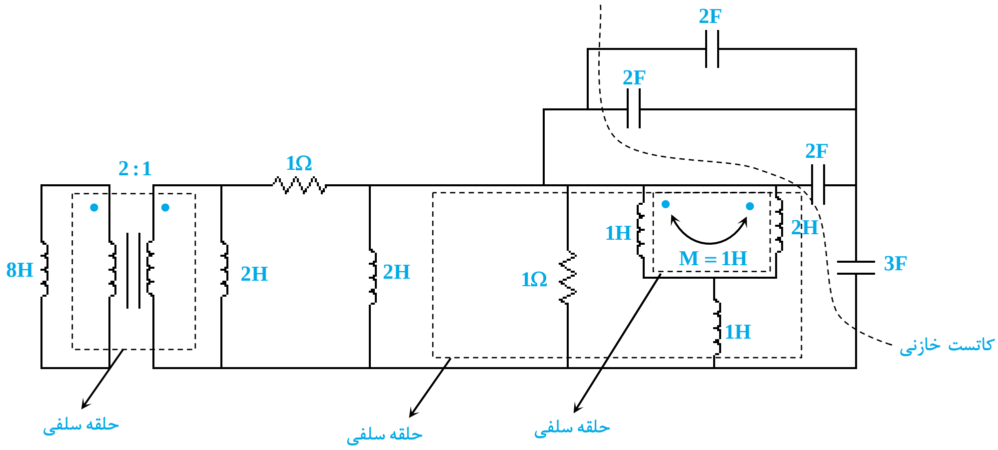


با نوشتن رابطه KCL در گره A داریم:

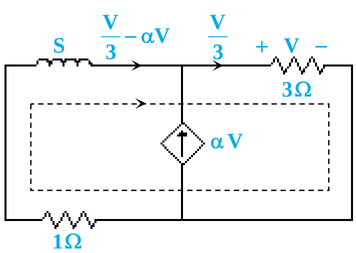
$$\frac{V_A}{S+1}+\frac{V_A}{1}+\frac{V_A}{S}+2S\,V_A=0 \Rightarrow \frac{2S^3+3S^2+3S+1}{S(S+1)}V_A=0$$

معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر : $\Rightarrow 2S^3+3S^2+3S+1=0$

حال با محاسبه تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر، معادله مشخصه کامل مدار را بدست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر، مدار دارای سه حلقه سلفی و یک کاتست خازنی و در نتیجه ۴ فرکانس طبیعی صفر است. پس معادله مشخصه به صورت $S^4(2S^3+3S^2+3S+1)=0$ می‌باشد.



۱۹ـ گزینه «۴» در صورتی که فرکانس‌های طبیعی مدار در سمت چپ محور $j\omega$ باشند، مدار پایدار نمایی است. حال ابتدا منابع مستقل مدار را صفر کرده و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.



با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

$$(1+S)(\frac{V}{3}-\alpha V)+V=0 \quad\Rightarrow\quad V((1+S)(\frac{1}{3}-\alpha)+1)=0$$

با صفر قرار دادن ضریب V ، معادله مشخصه مدار بدست می‌آید.

$$(1+S)(\frac{1}{3}-\alpha)+1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}-\alpha+S(\frac{1}{3}-\alpha)+1=0 \quad\Rightarrow\quad S=\frac{\alpha-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}-\alpha}=\frac{3\alpha-4}{1-3\alpha}$$

برای پایدار بودن مدار باید $S<0$ باشد؛ لذا داریم:

$$S=\frac{3\alpha-4}{1-3\alpha}<0$$

حال با چک کردن گزینه‌ها، دیده می‌شود که به ازای فقط $\alpha=2$ مقدار S منفی می‌شود.

۲۰ـ گزینه «۲» با توجه به این که $Z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$ است، برای محاسبه Z_{11} از آزمایش‌هایی استفاده می‌شود که در آن‌ها خروجی مدار باز بوده و یا به عبارتی I_2 در آنها صفر باشد. برای محاسبه صورت کسر $Z_{11}=\frac{V_1}{I_1}$ از آزمایشی استفاده می‌کنیم که در آن $V_1=0$ باشد و یا ورودی اتصال کوتاه باشد. بنابراین صورت کسر Z_{11} معادله مشخصه آزمایش (۴) است.

برای محاسبه مخرج کسر Z_{11} باید از آزمایشی استفاده شود که در آن $I_1=0$ باشد و یا به عبارتی ورودی مدار باز باشد. بنابراین مخرج کسر Z_{11} همان معادله مشخصه آزمایش (۳) است. حال داریم:

$$Z_{11}=\frac{S^2+4S+1}{S^2+4S+2}$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل دهم

۱ـ گزینه «۱» با توجه به قضیه تلگان داریم:

$$V_1(S).\hat{I}_1(S)+V_2(S).\hat{I}_2(S)+V_3(S)\hat{I}_3(S)=\hat{V}_1(S)I_1(S)+\hat{V}_2(S).I_2(S)+\hat{V}_3(S).I_3(S)$$

لازم به ذکر است که روابط نشانه‌دار مربوط به مدار (ب) می‌باشند. با جایگذاری اطلاعات سؤال داریم:

$$V_1(S)\times 0+\left(\frac{1}{S+1}-\frac{1}{S+2}\right)\frac{-1}{S+1}+0\times\hat{I}_2(S)=\hat{V}_1(S)\times\frac{-1}{S+2}+\hat{V}_2(S)\times 0+\frac{1}{S+1}\times\left(\frac{2}{S+2}-\frac{1}{S+1}\right)\Rightarrow \mathbf{\hat{V}_1(S)=\frac{1}{1+S}}\Rightarrow \mathbf{\hat{V}_1(t)=e^{-t}u(t)}$$

۲ـ گزینه «۴» با توجه به منحنی مشخصه $(I-V)$ برای مدارهای (الف) و (ب) داریم:

$$\text{الف)}\Rightarrow V_1=I_1 \quad \text{و} \quad \text{ب)}\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}V_2-1$$

$$\text{ج)}\Rightarrow \begin{cases}V_1=V_2\\ I_2=-I_1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}I_1=2I_2+2\\ I_2=-I_1\end{cases}\Rightarrow I_1=\frac{2}{3}\,A\Rightarrow \mathbf{V_1=V_2=I_1=\frac{2}{3}v}$$

۳ـ گزینه «۲» اگر ولتاژ دو سر منبع جریان V_o باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases}V_o=2I\\ I=\frac{1}{3}I_S+\frac{1}{4}V_S\end{cases}\Rightarrow V_o=\frac{2}{3}I_S+\frac{1}{2}V_S$$

دیده می‌شود که مقاومت تونن از دو سر منبع جریان در حضور R برابر $\frac{2}{3}$ است. حال اگر R نباشد، مقاومت دو سر آن R'_{th} نامیده می‌شود و روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases}R_{th}=\frac{2}{3}=R_{th}'\parallel R\\ R=2\Omega\end{cases}\Rightarrow \frac{2}{3}=R'_{th}\parallel 2\Rightarrow R'_{th}=1\Omega$$

برای جذب حداکثر توان انتقالی به R، باید مقاومت R برابر مقاومت تونن دیده شده از دو سر خود، در حالت عدم حضور R باشد،که برابر 1Ω است.

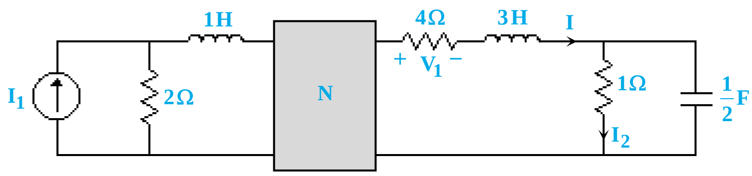
۴ـ گزینه «۲» برای محاسبه امپدانس از دو سر منبع ولتاژ V_{S_1}، لازم است که منابع دیگر ولتاژ را اتصال کوتاه کرده و رابطه‌ی مابین V_{S_1} و I_1 را بدست آوریم. حال داریم:

$$\begin{cases}10aI_1+I_2-aI_3=V_{S_1} & (1)\\ aI_1+\frac{1}{2}I_2=0 & (2)\\ -I_1+\frac{1}{2}I_3=0 & (3)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(2)\Rightarrow I_2=-2aI_1 & (4)\\ (3)\Rightarrow I_3=2I_1 & (5)\end{cases}$$

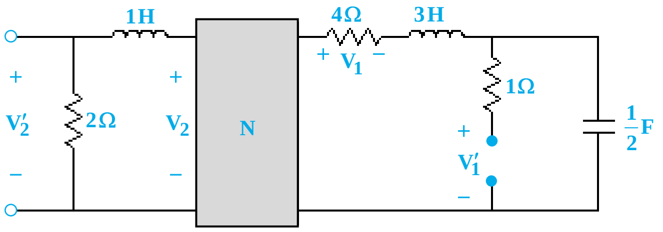
با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در رابطه (۱) داریم:

$$10aI_1+(-2a)I_1-a(2I_1)=V_{S_1}\Rightarrow V_{S_1}=6aI_1\Rightarrow \mathbf{R_{th}=\frac{V_{S_1}}{I_1}=6a}$$

۵ـ گزینه «۴» با توجه به قضیه هم‌پاسخی در دو مدار داریم:



$$\frac{I_2(S)}{I_1(S)}=\frac{V_2'(S)}{V_1'(S)}$$



$$I_1(S)=\frac{1}{S}$$

$$V_1'(S)=\frac{1}{S}$$

حال در شکل اول داریم:

$$I=\frac{V_1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\ \Rightarrow\ I(S)=\frac{3}{4S}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{S+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{S+3}$$

$$I_2(S)=I(S)\times\frac{\frac{2}{S}}{\frac{2}{S}+1}=I(S)\times\frac{2}{S+2}\ \Rightarrow\ I_2(S)=\left[\frac{3}{4S}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{S+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{S+3}\right]\times\frac{2}{S+2}$$

$$\Rightarrow\ I_2(S)=\frac{3}{2}\left[\frac{\frac{1}{2}}{S}+\frac{-\frac{1}{2}}{S+2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S+1}+\frac{-1}{S+2}\right]-\left[\frac{-1}{S+3}+\frac{1}{S+2}\right]\ \Rightarrow\ I_2(t)=\left[\frac{3}{4}-1.25e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t}+e^{-3t}\right]u(t)$$

با قرار دادن اطلاعات بدست آمده در قضیه هم‌پاسخی داریم:

$$\Rightarrow\ \frac{I_2(S)}{I_1(S)}=\frac{V_2'(S)}{V_1'(S)}\ \Rightarrow\ \frac{I_2(S)}{\frac{1}{S}}=\frac{V_2'(S)}{\frac{1}{S}}\ \Rightarrow\ I_2(S)=V_2'(S)\ \Rightarrow\ I_2(t)=V_2'(t)=\left[\frac{3}{4}-1.25e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t}+e^{-3t}\right]u(t)$$

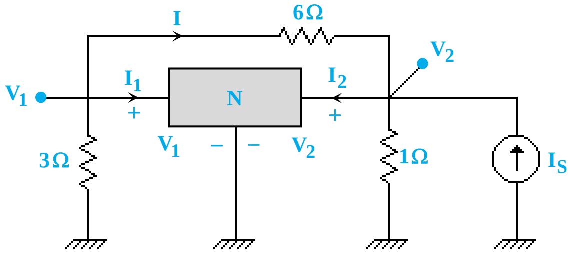
با توجه به شکل دوم در سمت چپ داریم:

$$V_2(t)=L\frac{dI_L(t)}{dt}+V_2'(t)$$

$$I_L(t)=\frac{V_2'(t)}{2}=\left[\frac{3}{8}-0.625e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$$

$$\Rightarrow\ V_2(t)=1\times\left[1.25e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\right]+V_2'(t)\ \Rightarrow\ \mathbf{V_2(t)=\frac{1}{4}u(t)\left[-e^{-t}-2e^{-3t}+3\right]}$$

۶ـ گزینه «۲» ابتدا در گره‌های سمت چپ و سمت راست KCL می‌زنیم و روابط بدست آمده را با روابط موجود در اطلاعات سؤال ترکیب می‌کنیم. سپس رابطه I را برحسب V_1 و V_2 نوشته و در روابط جایگذاری می‌کنیم.



ابتدا در گره سمت چپ KCL می‌زنیم:

$$\frac{V_1}{3}+I_1+\frac{V_1-V_2}{6}=0$$

با جایگذاری رابطه I_1 از اطلاعات سؤال در رابطه بالا داریم:

$$\frac{V_1}{3}+2V_1+\alpha V_2+\frac{V_1-V_2}{6}=0\ \Rightarrow\ 15V_1+V_2(6\alpha-1)=0\qquad(1)$$

حال با نوشتن KCL در گره سمت راست داریم:

$$\frac{V_2}{1}+\frac{V_2-V_1}{6}+I_2=I_S$$

با جایگذاری رابطه I_2 از اطلاعات سؤال در رابطه بالا داریم:

$$V_2+\frac{V_2-V_1}{6}+(-2V_1+3V_2)=I_S\ \Rightarrow\ 25V_2-13V_1=6I_S\qquad(2)$$

با توجه به قانون اهم برای جریان I و همچنین رابطه $I=\frac{1}{9}I_S$ داریم:

$$I=\frac{V_1-V_2}{6}\ \Rightarrow\ \frac{1}{9}I_S=\frac{V_1-V_2}{6}\ \Rightarrow\ I_S=\frac{3}{2}(V_1-V_2)\qquad(3)$$

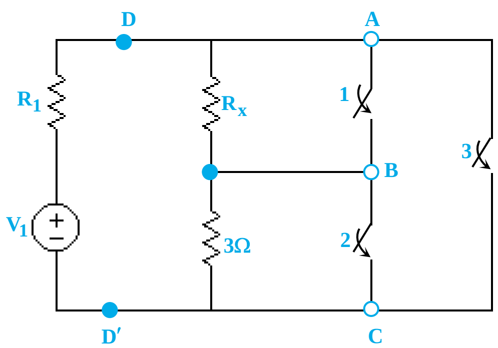
با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) داریم:

$$25V_2-13V_1=6\left[\frac{3}{2}(V_1-V_2)\right]\ \Rightarrow\ V_1=\frac{17V_2}{11}\qquad(4)$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۱) داریم:

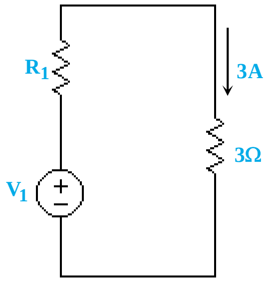
$$15\left[\frac{17V_2}{11}\right]+V_2(6\alpha-1)=0\ \Rightarrow\ \frac{15\times17}{11}+6\alpha-1=0\ \Rightarrow\ \mathbf{\alpha=-3.7}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا از سرهای D و D′ مشخص شده در شکل، شبکه معادل تونن با مقاومت R_1 و V_1 را مشخص می‌کنیم که در این صورت مطابق با شکل خواهیم داشت:



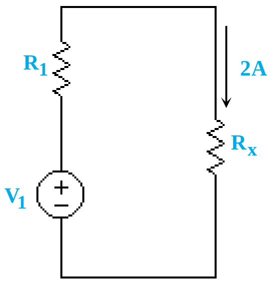
حال باید مقادیر $R_۱$، $V_۱$ و R_x را پیدا کنیم.

مطابق با آزمایش (۱) و در صورت بسته بودن کلید ۱ داریم:



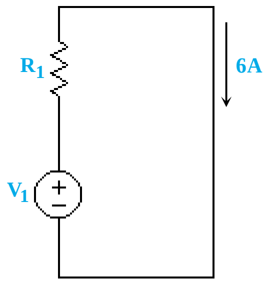
$$\Rightarrow V_۱ = ۳R_۱ + ۹ \qquad (۱)$$

مطابق با آزمایش (۲) و در صورت بسته بودن کلید ۲ داریم:



$$\Rightarrow V_۱ = ۲R_۱ + ۲R_x \qquad (۲)$$

و مطابق با آزمایش (۳) و در صورت بسته بودن کلید ۳ داریم:



$$\Rightarrow V_۱ = ۶R_۱ \qquad (۳)$$

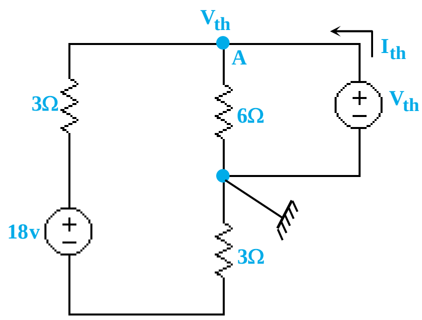
از معادلات (۱) و (۳) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} V_۱ = ۳R_۱ + ۹ \\ V_۱ = ۶R_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow R_۱ = ۳\Omega \,,\, V_۱ = ۱۸\,v$$

با جایگذاری مقادیر بالا در (۲) داریم:

$$۱۸ = ۲\times۳ + ۲R_x \Rightarrow R_x = ۶\Omega$$

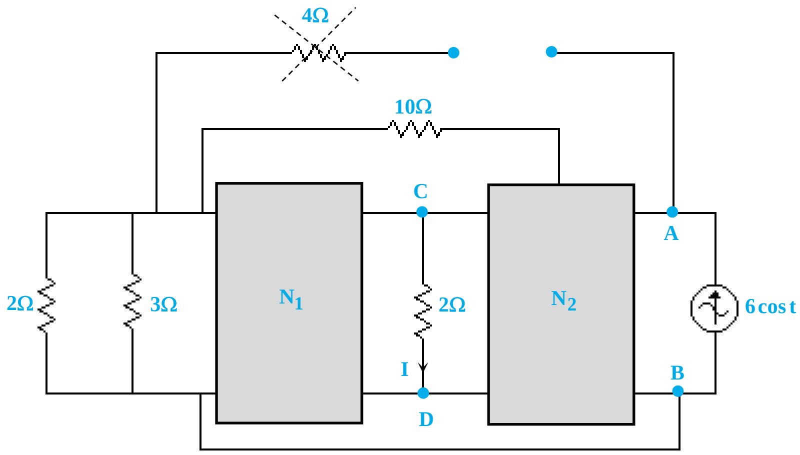
حال با داشتن مقادیر $V_۱$ و $R_۱$ و R_x، مدار معادل تونن از دو سر کلید ۱ را به دست می‌آوریم:



با نوشتن KCL در گره A داریم:

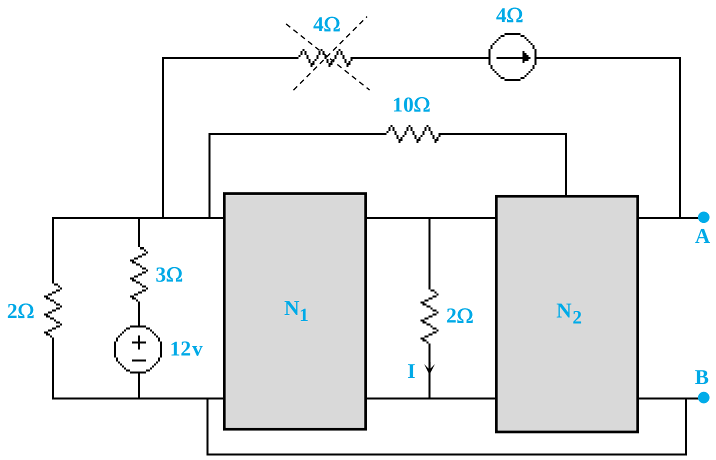
$$\frac{V_{th} - ۱۸}{۶} + \frac{V_{th}}{۶} - I_{th} = ۰ \Rightarrow ۲V_{th} - ۱۸ = ۶I_{th} \Rightarrow V_{th} = ۳I_{th} + ۹ \rightarrow \begin{cases} R_{th} = ۳\Omega \\ V_{th} = ۹v \end{cases}$$

۸ـ گزینه «۴» اگر جریان I شامل تابع $-\frac{۱}{۳}\cos t$ باشد، می‌توان با استفاده از جمع آثار ارتباط خطی این جریان را با منبع $۶\cos t$ محاسبه کرد. در صورتی که همه منابع مستقل به جز منبع $۶\cos t$ حذف شوند، داریم:

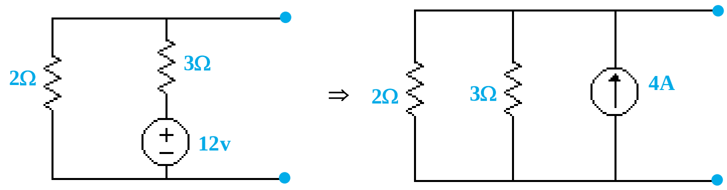


$$I = K \times ۶\cos t \Rightarrow -\frac{۱}{۳}\cos t = K \times ۶\cos t \Rightarrow K = -\frac{۱}{۱۸}$$

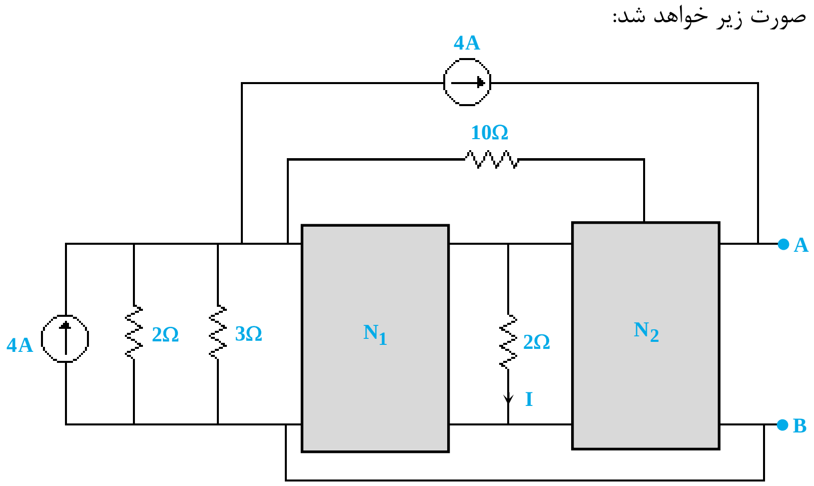
می‌دانیم مقدار متوسط جریان I ناشی از اثر منابع DC مدار است.
حال در صورت وجود فقط منابع DC مدار به صورت مقابل خواهد بود:
(به علت وجود منبع جریان سری با مقاومت ۴Ω، می‌توان مقاومت را در نظر نگرفت.)



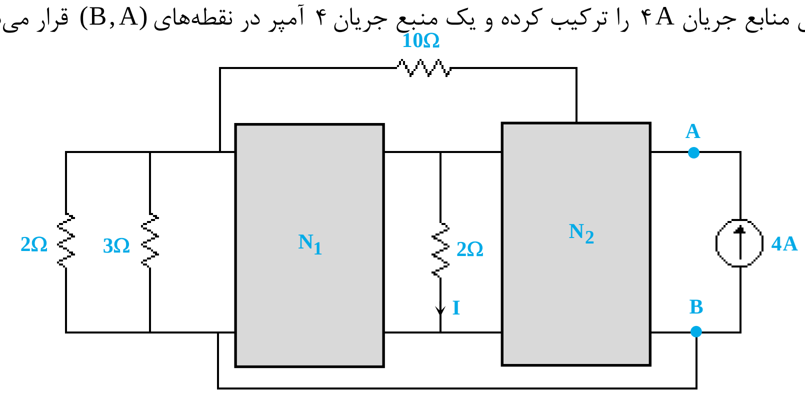
با تبدیل منابع در سمت چپ مدار داریم:



با جایگذاری مدار بالا، مدار اصلی به صورت زیر خواهد شد:



با استفاده از قضیه پرش خرگوش منابع جریان ۴A را ترکیب کرده و یک منبع جریان ۴ آمپر در نقطه‌های (B,A) قرار می‌دهیم:

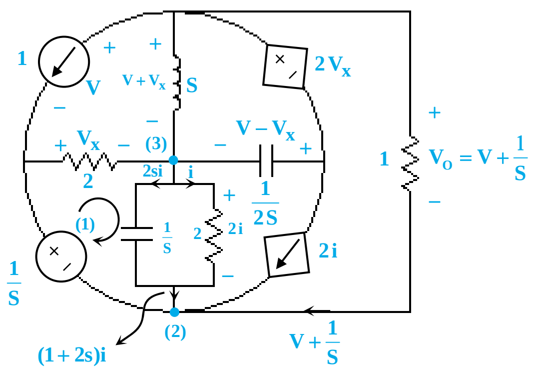


با توجه به تشابه مدار بالا با حالتی که فقط منبع ۶cos t در مدار بود، می‌توان برای بدست آوردن قسمت DC جریان I از K بدست آمده در حالت اول استفاده کرد:

$$I = K \times ۴A \Rightarrow I = -\frac{۱}{۱۸} \times ۴ = -\frac{۲}{۹}A$$

بنابراین مقدار متوسط جریان I یا همان قسمت DC آن برابر با $-\frac{۲}{۹}$ آمپر است.

۹ـ گزینه «۴» طبق قضیه جانشینی، اگر منبع جریان $\delta(t)$ در شاخه مورد نظر را با یک منبع ولتاژ به اندازه V که برابر ولتاژ دو سر آن شاخه است جایگزین کنیم، هیچ تغییری در ولتاژ و جریان سایر شاخه‌های مدار بوجود نخواهد آمد. پس ما باید ولتاژ دو سر این شاخه یا همان V را محاسبه کنیم.
در شکل مقابل ولتاژ و جریان شاخه‌های مختلف مدار بر حسب سه پارامتر مجهول V، V_x و i بیان شده است:



برای محاسبه این سه پارامتر مجهول، نیاز به سه معادله داریم که آن‌ها را باید با KVL و KCL پیدا کنیم. اگر در حلقه (۱)، KVL بزنیم، داریم:

$$V_x+۲i-\frac{۱}{S}=۰\Rightarrow V_x=-۲i+\frac{۱}{S}$$

حال در گره (۲)، KCL می‌زنیم:

$$۲i+i+۲Si+۱-\frac{V_x}{۲}+V+\frac{۱}{S}=۰\Rightarrow(۲S+۳)i-\frac{V_x}{۲}+V+۱+\frac{۱}{S}=۰$$

$$V_x=-۲i+\frac{۱}{S}\Rightarrow(۲s+۳)i+i-\frac{۱}{۲S}+V+۱+\frac{۱}{S}=(۲s+۴)i+V+۱+\frac{۱}{۲S}=۰$$

$$\Rightarrow i=-\frac{۱}{۲S+۴}V-\frac{۲S+۱}{۲S(۲S+۴)}\ ,\ V_x=-۲i+\frac{۱}{S}=\frac{۱}{S+۲}V+\frac{۴S+۵}{S(۲S+۴)}$$

در نهایت به سراغ گره (۳) رفته و KCL می‌زنیم:

$$\frac{V+V_x}{S}+\frac{V_x}{۲}+۲S(V-V_x)-(۱+۲S)i=۰\Rightarrow\frac{۲S^۲+۱}{S}V+\frac{-۴S^۲+s+۲}{۲S}V_x-(۱+۲S)i=۰$$

با جایگزینی روابط بدست آمده برای V_x و i داریم:

$$\left[\frac{۲S^۲+۱}{S}+\frac{-۴S^۲+S+۲}{۲S}\times\frac{۱}{S+۲}+\frac{۲S+۱}{۲S+۴}\right]V+\frac{-۴S^۲+s+۲}{۲S}\times\frac{۴S+۵}{S(۲S+۴)}+\frac{(۲S+۱)^۲}{۲S(۲S+۴)}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۲S^۳+۳S^۲+۲S+۳}{S(S+۲)}V=\frac{۶S^۳+۶S^۲-۷S-۵}{۲S^۲(S+۲)}\Rightarrow V=\frac{۶S^۳+۶S^۲-۷S-۵}{۴S(S^۲+۱)(S+۱/۵)}=\frac{-\frac{۵}{۶}}{S}+\frac{\frac{۵}{۷۸}}{S+۱/۵}+\frac{\frac{۵۹}{۲۶}S-\frac{۱۷}{۲۶}}{S^۲+۱}$$

و در نهایت داریم:

$$\mathbf{V(t)=-\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۷۸}e^{-۱/۵t}+\frac{۵۹}{۲۶}\cos t-\frac{۱۷}{۲۶}\sin t}$$

۱۰ـ گزینه «۴» برای حل این مثال، باید از قضیه تلگان استفاده کنیم. در قضیه تلگان داریم: (در دوقطبی)

$$I_۱\hat{V}_۱+I_۲\hat{V}_۲+=\hat{I}_۱V_۱+\hat{I}_۲V_۲\qquad(۱)$$

در این جا $I_۱=-\sin t$، $V_۱$ ولتاژ دو سر منبع $\sin t$، $I_۲$ برابر جریان ورودی به سیم‌پیچ $n_۱$، $V_۲$ ولتاژ سیم‌پیچ $n_۱$، $\hat{I}_۱$ برابر صفر، $\hat{V}_۱=۲\cos(t+\pi)$، $\hat{I}_۲$ جریان ورودی به سیم‌پیچ $n_۲$ و $\hat{V}_۲$ ولتاژ سیم‌پیچ $n_۲$ می‌باشد.

با توجه به روابط ترانس ایده‌آل داریم:

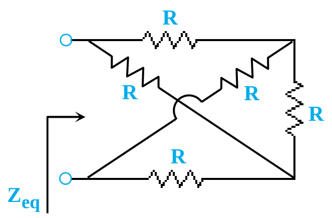
$$\begin{cases}\hat{I}_۲=-\frac{۳}{۵}I_۲\\ \hat{V}_۲=\frac{۵}{۳}V_۲\end{cases}$$

توان لحظه‌ای سیم‌پیچ اولیه نیز برابر $P_i=V_۲I_۲$ می‌باشد. با جایگذاری مقدار تمام پارامترها در رابطه (۱) داریم:

$$-\sin t\times۲\cos(t+\pi)+I_۲\times\frac{۵}{۳}V_۲=۰+(\frac{-۳}{۵}I_۲)\times V_۲\Rightarrow(\frac{۵}{۳}+\frac{۳}{۵})I_۲V_۲=\sin t\times۲\underbrace{\cos(t+\pi)}_{-\cos t}=-\sin۲t$$

$$\Rightarrow I_۲V_۲=\frac{۱۵}{۳۴}\times(-\sin۲t)=-\frac{۱۵}{۳۴}\sin۲t\Rightarrow\mathbf{P_i=-\frac{۱۵}{۳۴}\sin۲t}$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل یازدهم



۱ـ گزینه «۳»
در صورتی که به عنوان مثال $Z_A = R$ و $Z_B = R$ فرض شود، آنگاه حاصلضرب آنها $R^۲$ خواهد شد. در این حالت مقدار گزینه‌ها نیز متفاوت است. حال مدار بدست آمده یک پل وتستون بوده و برای Z_{eq} داریم:

$$Z_{eq} = ۲R \parallel ۲R = R$$

۲ـ گزینه «۱» برای بدست آوردن ماتریس ادمیتانس گره، جمع ادمیتانس‌های متصل به گره‌ها در قطر اصلی و منفی جمع ادمیتانس‌های بین گره‌ها در قطر فرعی نوشته می‌شود. لذا داریم:

$$y = \begin{bmatrix} ۲(S+۱) & -(S+۱) \\ -(S+۱) & ۲(S+۱) \end{bmatrix}$$

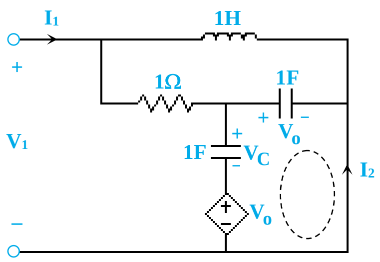
۳ـ گزینه «۴» **روش اول:** برای بدست آوردن ماتریس Z، با توجه به اینکه مدار به صورت مدار π می‌باشد، ابتدا ماتریس Y را محاسبه و سپس ماتریس Z را از روی ماتریس y محاسبه می‌کنیم:

$$Y = \begin{bmatrix} ۱+\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۵}{۶} \end{bmatrix} \Rightarrow Z = Y^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۶} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

روش دوم: راه ذهنی (تستی): $Z_{۱۱}$ همان R_{th} ورودی است. ($۱ \| ۵ = \frac{۵}{۶}$ $\Leftarrow$ گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.)

$Z_{۲۲}$ همان R_{th} خروجی است. ($۳ \| ۳ = \frac{۳}{۲}$ $\Leftarrow$ گزینه (۴) صحیح است.)

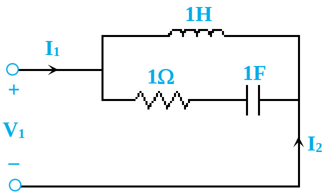
۴ـ گزینه «۱»



$$y_{۲۱} = \left.\frac{I_۲}{V_۱}\right|_{V_۲ = ۰}$$

با توجه به شرط $y_{۲۱}$، ولتاژ خروجی را صفر یا به عبارتی دو سر خروجی را اتصال کوتاه می‌کنیم. با نوشتن KVL در مسیر مشخص شده داریم:

$$-V_o - V_C + V_o = ۰ \Rightarrow V_C = ۰$$



با توجه به صفر بودن ولتاژ خازن، جریان خازن نیز صفر است. لذا جریان شاخه وسط که شامل خازن است، صفر می‌باشد و می‌توان آن شاخه را مدار باز فرض کرد. حال داریم:

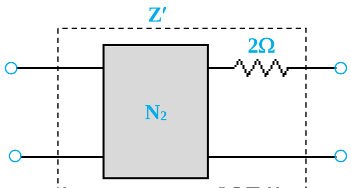
$$I_۱ = -I_۲$$

$$y_{۲۱} = \left.\frac{I_۲}{V_۱}\right|_{V_۲ = ۰} = \left.\frac{-I_۱}{V_۱}\right|_{V_۲ = ۰}$$

با توجه به تعریف بدست آمده برای $y_{۲۱}$، باید منفی ادمیتانس ورودی حساب شود. بنابراین داریم:

$$Y_{in} = \frac{۱}{S} + \frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}} = \frac{۱}{S} + \frac{S}{S+۱} = \frac{(S+۱)+S^۲}{S(S+۱)} \Rightarrow y_{۲۱} = -Y_{in} = -\frac{S^۲+S+۱}{S(S+۱)}$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا ماتریس مجموعه شبکه $N_۲$ و مقاومت ۲Ω در خروجی را محاسبه می‌کنیم. سپس ماتریس امپدانس بدست آمده را معکوس کرده تا ماتریس ادمیتانس بدست آید.



$$Z' = \begin{bmatrix} S+۳ & S \\ S & S+۳ \end{bmatrix} \Rightarrow Y = [Z]^{-۱} \Rightarrow Y = \frac{۱}{۶S+۹}\begin{bmatrix} S+۳ & -S \\ -S & S+۳ \end{bmatrix}$$

در صورتی که مقاومت ۱Ω در ورودی در نظر گرفته شود، برای $y_{۱۱}$ داریم:

$$y_{۱۱} = \frac{۱}{۶S+۹}(S+۳)+۱ = \frac{۷S+۱۲}{۶S+۹}$$

۶ـ گزینه «۴» با نوشتن KCL در گره ورودی داریم:

$$I_1 = 2V_X + I_X + y_1V_1 \qquad (1)$$

با نوشتن KCL در گره خروجی داریم:

$$I_2 = 2I_X - 2V_X - I_X \qquad (2)$$

$$I_X = y_2(V_1 - V_2) \quad \text{و} \quad V_X = V_1$$

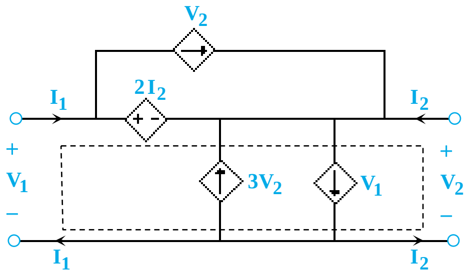
با جایگذاری روابط بالا در معادلات (۱) و (۲) و با نوشتن معادلات بالا به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{cases} I_1 = V_1(2+y_2+y_1)+V_2(-y_2) \\ I_2 = V_1(y_2-2)+V_2(-y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+y_2+2 & -y_2 \\ y_2-2 & -y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y_1+y_2+2} & \mathbf{-y_2} \\ \mathbf{y_2-2} & \mathbf{-y_2} \end{bmatrix}$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به وجود پارامترهای Z، رابطه Z_0 را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم.

$$Z = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 30 \end{bmatrix} \qquad Z_0 = Z_{22} - \frac{Z_{21}.Z_{12}}{Z_{11}+Z_S} \Rightarrow Z_0 = 30 - \frac{20\times 20}{10+100} = \frac{\mathbf{290}}{\mathbf{11}}\Omega$$

۸ـ گزینه «۴» با توجه به این که المان‌های سری با منابع جریان وابسته، از مدار قابل حذف می‌باشند، مدار را ساده کرده و در حلقه نشان داده شده KVL می‌زنیم:



$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \quad , \quad V_1 = 2I_2 + V_2 \qquad (1)$$

با نوشتن KCL در گره پایین مدار داریم:

$$I_1 + I_2 + 3V_2 = V_1$$

$$I_1 = 0 \Rightarrow I_2 + 3V_2 = V_1 \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$I_2 + 3V_2 = 2I_2 + V_2 \Rightarrow I_2 = 2V_2 \Rightarrow \mathbf{h_{22}} = \frac{\mathbf{I_2}}{\mathbf{V_2}} = \mathbf{2}$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا در گره‌های ورودی و خروجی KCL می‌زنیم و سپس معادلات ژیراتور را در آنها جایگزین می‌کنیم.

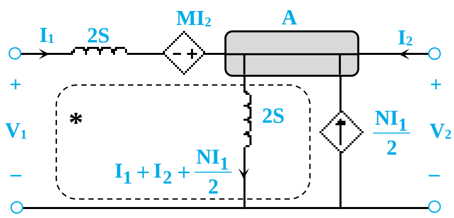
$$\text{KCL (گره ورودی)}: \; I_1 = I_1' + S(V_1 - V_2)$$

$$\text{KCL (گره خروجی)}: \; I_2 = I_2' + \frac{V_2}{S} + S(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = SV_1 + (-S - \frac{1}{2})V_2 \\ I_2 = (-S + \frac{1}{2})V_1 + (S + \frac{1}{S})V_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{-S-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{-S+\frac{1}{2}} & \mathbf{S+\frac{1}{S}} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \alpha I_2' \quad , \quad V_2 = -\alpha I_1' \quad , \quad \alpha = 2$$

۱۰ـ گزینه «۲» برای تحقیق وجود یا عدم وجود ماتریس‌های مذکور، ابتدا ماتریس امپدانس را برای مدار بدست می‌آوریم. با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$I_1 + I_2 + \frac{NI_1}{2} = \frac{V_2}{2S} \Rightarrow V_2 = I_1(2S+SN)+(2S)I_2 \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$V_1 = 2SI_1 - MI_2 + 2S(I_1 + I_2 + \frac{NI_1}{2}) \Rightarrow V_1 = I_1(4S+SN)+I_2(2S-M) \qquad (2)$$

با بازنویسی روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} V_1 = I_1(4S+NS)+(2S-M)I_2 \\ V_2 = I_1(2S+NS)+2SI_2 \end{cases} \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} 4S+NS & 2S-M \\ 2S+NS & 2S \end{bmatrix}$$

$\text{if} \quad N \neq -4 \Rightarrow Z_{11} \neq 0 \Rightarrow$ ماتریس G وجود دارد

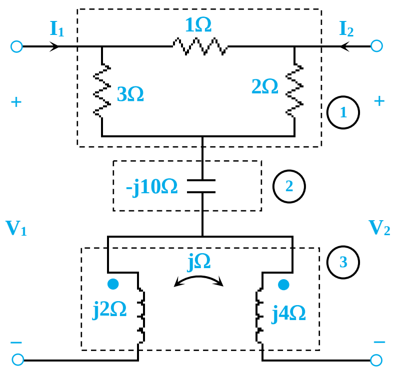
$\text{if} \quad N \neq -2 \Rightarrow Z_{21} \neq 0 \Rightarrow$ ماتریس T وجود دارد

$Z_{22} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ماتریس H همواره وجود دارد

با توجه به موارد گفته شده برای $N \neq -4$ ماتریس G وجود دارد. لذا گزینه (۱) غلط است. همچنین به ازای کلیه مقادیر M و N مقدار $Z_{22} \neq 0$ بوده و ماتریس H همیشه وجود دارد. لذا گزینه‌های (۳) و (۴) غلط هستند.

با توجه به شرط $N \neq -2$ مقدار $Z_{21} \neq 0$ است و لذا ماتریس T به ازای این شرط همیشه وجود دارد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۱۱ـ گزینه «۳» مدار فوق از سه جزء تشکیل شده است که با توجه به جدول ذکر شده در بخش‌های قبل برای ماتریس Z آنها داریم:



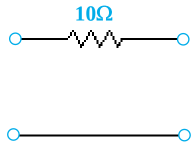
$$Z_2=\begin{bmatrix}-j10 & -j10\\ -j10 & -j10\end{bmatrix}\quad,\quad Z_3=\begin{bmatrix}j2 & j\\ j & j4\end{bmatrix}$$

$$Y_1=\begin{bmatrix}1.33 & -1\\ -1 & 1.5\end{bmatrix}\Rightarrow Z_1=Y_1^{-1}=\begin{bmatrix}1.5 & 1\\ 1 & 1.33\end{bmatrix}$$

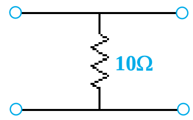
$$\Rightarrow Z_T=Z_1+Z_2+Z_3=\begin{bmatrix}-j10+j2+1.5 & -j10+j+1\\ 1+j-j10 & 1.33-j10+j4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z_T}=\begin{bmatrix}-j8+1.5 & -j9+1\\ 1-j9 & 1.33-j6\end{bmatrix}$$

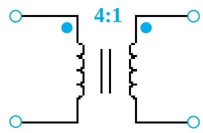
۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به نکات گفته شده در متن درس داریم:



$$\Rightarrow \mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{10} & 1\end{bmatrix}$$

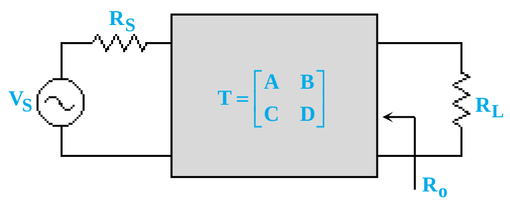


$$\Rightarrow \mathbf{T}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه مدار شامل ۶ المان بوده که به صورت متوالی به هم بسته شده‌اند، لذا ماتریس T آنها در هم ضرب شده و ماتریس T کل مدار بدست می‌آید.

$$\Rightarrow T=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{10} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{10} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{10} & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{T}=\begin{bmatrix}20.75 & 7.5\\ 1.25 & 0.5\end{bmatrix}$$

۱۳ـ گزینه «۴» در صورت جذب توان حداکثر توسط بار، مقدار R_L با مقدار R_{th} از دو سر آن یعنی R_o برابر است. حال داریم:

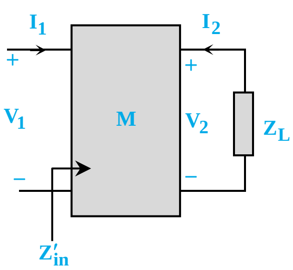


$$P(max)=\frac{V_{th}^2}{4R_{th}}\Rightarrow 20=\frac{10^2}{4\times R_{th}}\Rightarrow R_{th}=1.25\Omega$$

$$R_o=\frac{DR_S+B}{CR_S+A}=R_{th}=1.25\Omega\Rightarrow 1.25=\frac{D\times 0.5+3}{1\times 0.5+2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D=t_{22}=0.25}$$

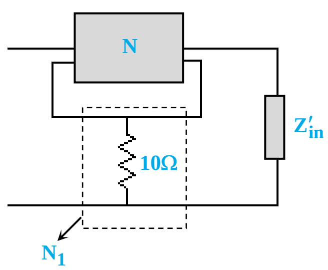
۱۴ـ گزینه «۱» ابتدا امپدانس ورودی از دو سر دوقطبی M به صورت زیر بدست می‌آید:



$$I_2=-\frac{V_2}{Z_L}=-\frac{V_2}{\infty}=0\Rightarrow \begin{cases}V_1=t_{11}V_2\\ I_1=t_{21}V_2\end{cases}\Rightarrow Z'_{in}=\frac{t_{11}}{t_{21}}$$

$$\Rightarrow Z'_{in}=\frac{20S^2+1}{40S^3+2S}=\frac{1}{2S}$$

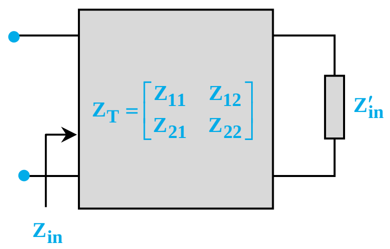
حال دقت شود که دوقطبی‌های N و N_1 با هم سری هستند. پس داریم:



$$Z_{N_1}=\begin{bmatrix}10 & 10\\ 10 & 10\end{bmatrix}$$

$$[Z_T]=[Z_N]+[Z_{N_1}]=\begin{bmatrix}7S+10 & 6S+10\\ 6S+10 & 8S+10\end{bmatrix}$$

حال با توجه به نکته‌ی زیر داریم:



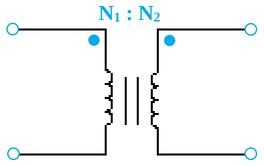
$$Z_{in} = Z_{۱۱} - \frac{Z_{۱۲}\ Z_{۲۱}}{Z_{۲۲} + Z'_{in}}$$

$$\Rightarrow Z_{in} = (۷S + ۱۰) - \frac{(۶S + ۱۰)^۲}{۸S + ۱۰ + \frac{۱}{۲S}}$$

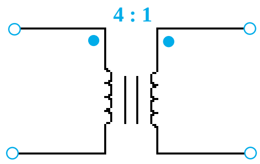
در حالت دائمی سینوسی داریم: $(S = ۰/۵\,j)$

$$Z_{in} = (۳/۵\,j + ۱۰) - \frac{(۳j + ۱۰)^۲}{۴j + ۱۰ - j} = ۳/۵\,j + ۱۰ - ۳j - ۱۰ = ۰/۵\,j\Omega$$

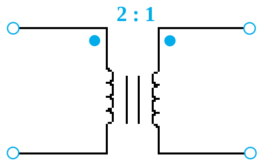
۱۵ـ گزینه «۲» با توجه به بسته شدنِ متوالی دو قسمت مدار، ماتریس انتقال تک‌تک آنها را در هم ضرب می‌کنیم تا ماتریس انتقال کل مدار بدست آید.



$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{N_۱}{N_۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{N_۲}{N_۱} \end{bmatrix}$$

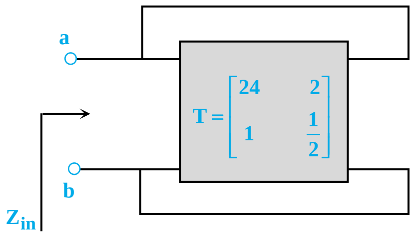


$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_T = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_T = \begin{bmatrix} ۲۴ & ۲ \\ ۱ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به نکته ذکر شده در قبل داریم:



$$y_{in} = \frac{A + D - (AD - BC) - ۱}{B} \Rightarrow y_{in} = \frac{۲۴ + \frac{۱}{۲} - (۲۴ \times \frac{۱}{۲} - ۲ \times ۱) - ۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y_{in} = ۶/۷۵\mho \Rightarrow Z_{in} = ۰/۱۴\Omega$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل دوازدهم

۱ـ گزینه «۲» با دقت در منحنی V و I مقاومت غیرخطی دیده می‌شود که معادله آن در بازه ۳ تا ۴ ولت به صورت $I = V + ۲$ می‌باشد و با توجه به اینکه ولتاژ اولیه خازن ۴ ولت است، لذا شروع حرکت از این قسمت نمودار است. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$C\frac{dV_C}{dt} + I_R = ۰ \Rightarrow \frac{dV}{dt} + I_R = ۰$$

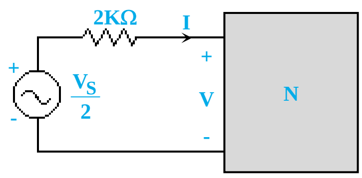
I_R را از معادله $I_R = V + ۲$ در معادله بالا جایگزین می‌کنیم. لذا داریم:

$$\frac{dV}{dt} + V + ۲ = ۰ \Rightarrow V = ۶e^{-t} - ۲$$

حال با توجه به معادله به دست آمده، زمان رسیدن به ولتاژ ۲ ولت را محاسبه می‌کنیم.

$$۲ = ۶e^{-t} - ۲ \Rightarrow e^{-t} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \mathbf{t = Ln(\frac{۳}{۲})\,(sec)}$$

۲ـ گزینه «۲» اگر معادل تونن قسمت ورودی گذاشته شود، داریم:



$$V = \frac{V_S}{۲} - ۲I$$

با جایگذاری V_S داریم:

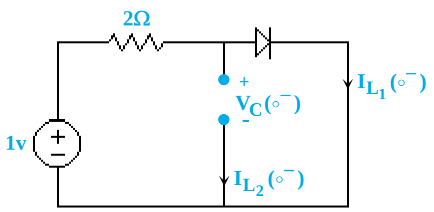
$$V = ۱۰ - ۲I + ۰/۱\cos ۲t$$

در صورتی که معادله بدست آمده با نمودار I بر حسب V قطع داده شود، نقطه قطع همواره در قسمت افقی خواهد بود. لذا مقدار I ثابت و برابر ۳ میلی‌آمپر خواهد بود. با جایگذاری مقدار I در رابطه مذکور داریم:

$$\mathbf{V = ۱۰ + ۰/۱\cos ۲t - ۲ \times ۳ = ۴ + ۰/۱\cos ۲t}$$

۳ـ گزینه «۲» برای بدست آوردن جریان اولیه سلف‌ها و ولتاژ اولیه خازن، ابتدا مدار را در $t < ۰$ تحلیل می‌کنیم. در $t < ۰$ منبع e_S برابر ۱ ولت است و دیود نیز هدایت می‌کند.

$t = ۰^- :$

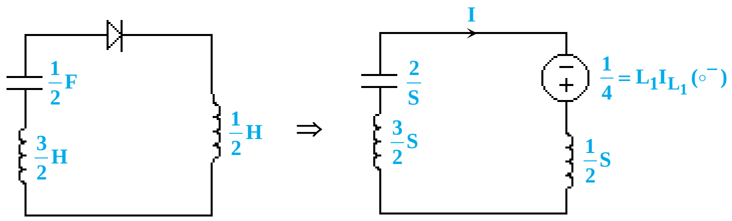


$$I_{L_۱}(۰^{\pm}) = \frac{۱}{۲}A \quad , \quad V_C(۰^{\pm}) = ۰$$

$$I_{L_۲}(۰^{\pm}) = ۰$$

حال مدار را در $t > ۰$ و در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم.

$t > ۰ :$



$$I = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{S} + \frac{۳}{۲}S + \frac{۱}{۲}S} = \frac{\frac{۱}{۸}S}{S^۲ + ۱} = \frac{۱}{۸}\cos t.u(t)$$

زمان هدایت دیود برابر مدت زمانی است که جریان I صفر و مثبت باشد. با توجه به معادله جریان I، مقدار I تا زمان $\mathbf{t = \frac{\pi}{۲}(sec)}$ مثبت و غیرصفر است.

۴ـ گزینه «۳» با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

$$۴ = V + RI \Rightarrow ۴ = I^{\frac{۱}{۳}} + RI \qquad (۱)$$

حال طرفین رابطه را در I ضرب می‌کنیم.

$$۴I = I^{\frac{۴}{۳}} + RI^۲$$

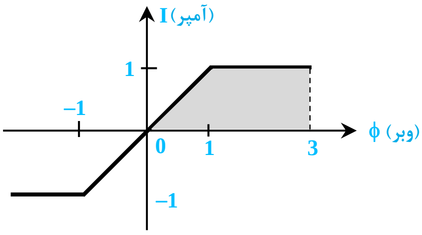
عبارت $RI^۲$ توان مصرفی مقاومت است و باید حداکثر شود. لذا آن را P_R نامیده و از رابطه مشتق استفاده می‌کنیم.

$$۴I = I^{\frac{۴}{۳}} + P_R \Rightarrow P_R = ۴I - I^{\frac{۴}{۳}} \qquad \frac{dP_R}{dI} = ۴ - \frac{۴}{۳}I^{\frac{۱}{۳}} = ۰ \Rightarrow I = ۳^۳\ A$$

حال مقدار I بدست آمده را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم.

$$۴ = (۳^۳)^{\frac{۱}{۳}} + R \times ۳^۳ \Rightarrow \mathbf{R = \frac{۱}{۳^۳} = \frac{۱}{۲۷}\Omega}$$

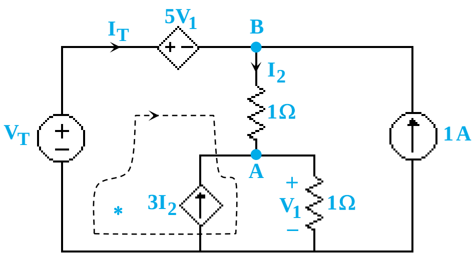
۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار $(I-\phi)$ بیانگر انرژی ذخیره شده در سلف است، داریم:



$$\varepsilon_M = \int_{\circ}^{\phi} I(\phi)d\phi$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_M = S = \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۳+۲}{۲}\times ۱ = \frac{۵}{۲}\mathbf{J}$$

۶ـ گزینه «۴» ابتدا از دو سر مقاومت غیرخطی، مدار معادل تونن دیده می‌شود.



با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$V_T = ۵V_۱ + I_۲ \times ۱ + V_۱ \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$۳I_۲ + I_۲ = \frac{V_۱}{۱} \quad \Rightarrow \quad V_۱ = ۴I_۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_T = ۵\times ۴I_۲ + I_۲\times ۱ + ۴I_۲ \quad \Rightarrow \quad V_T = ۲۵I_۲ \qquad (۳)$$

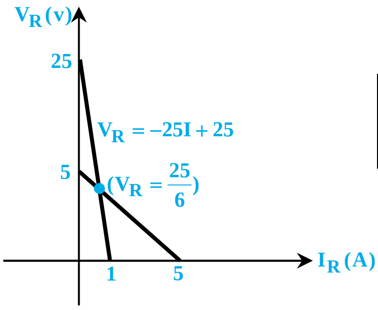
با نوشتن KCL در گره B داریم:

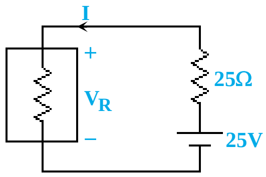
$$I_T + ۱ = I_۲ \quad \Rightarrow \quad I_۲ = I_T + ۱ \qquad (۴)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۴)} V_T = ۲۵(I_T+۱) \quad \Rightarrow \quad V_T = ۲۵I_T + ۲۵ \qquad (۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{th} = ۲۵\,v \\ R_{th} = ۲۵\Omega \end{cases}$$

با معادل‌گذاری تونن داریم:





$$\Rightarrow \quad KVL: -۲۵ + ۲۵I + V_R = ۰ \quad \Rightarrow \quad V_R = -۲۵I + ۲۵$$

با قطع دادن رابطه به دست آمده در بالا، با مشخصه $(I-V)$ داریم:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V_R = \frac{۲۵}{۶}\,v}$$

۷ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه $I_C = -I_R$، معادله دیفرانسیل را براساس متغیر V_C بدست می‌آوریم.

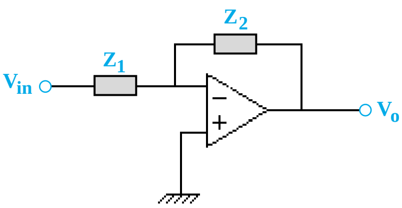
$$C\frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C^۳}{۳} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C^۳}{۳} \quad \Rightarrow \quad \frac{-۳}{V_C^۳}dV_C = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۲V_C^۲} + k = t$$

$$V_C(۰) = ۳v \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۲\times ۳^۲} + k = ۰ \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{۱}{۶} \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۲V_C^۲} - \frac{۱}{۶} = t \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۲V_C^۲} = t + \frac{۱}{۶} \quad \Rightarrow \quad \frac{۲V_C^۲}{۳} = \frac{۱}{t+\frac{۱}{۶}}$$

$$\Rightarrow \quad V_C^۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{t+\frac{۱}{۶}} \quad \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{\frac{\frac{۳}{۲}}{t+\frac{۱}{۶}}} \quad \Rightarrow \quad V_C(t=۱) = \sqrt{\frac{\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۱}{۶}}} \quad \Rightarrow \quad V_C(t=۱) = \sqrt{\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۷}{۶}}} = \sqrt{\frac{۱۸}{۱۴}} = \sqrt{\frac{۹}{۷}} = \frac{۳}{\sqrt{۷}}\mathbf{v}$$

۸ـ گزینه «۲» مدار یک تقویت‌کننده منفی‌ساز است.

$$V_o = \frac{-Z_۲}{Z_۱}V_{in} \qquad Z_۱ = R + \frac{۱}{CS} = \frac{RCS+۱}{CS}$$

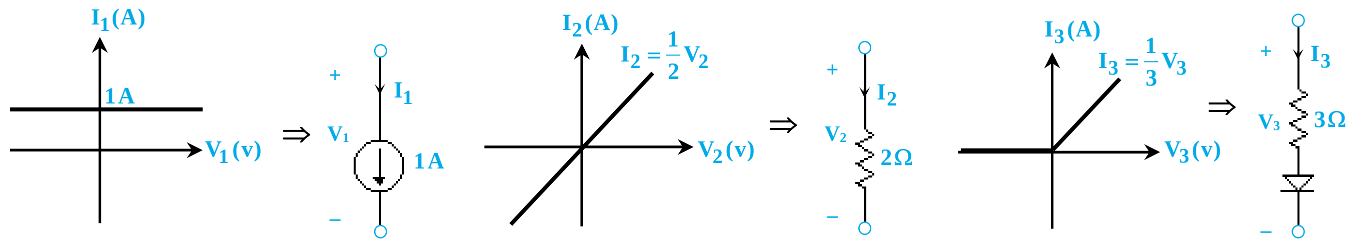


$$Z_۲ = R \| \frac{۱}{CS} = \frac{\frac{R}{CS}}{R+\frac{۱}{CS}} = \frac{R}{RCS+۱}$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{-\frac{R}{RCS+۱}}{\frac{RSC+۱}{CS}}V_{in} = \frac{-RCS}{(RCS+۱)^۲}\times V_{in} \;,\; V_{in} = \frac{۱}{S}$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{-RCS}{(RCS+۱)^۲}\times\frac{۱}{S} = \frac{-RC}{(RCS+۱)^۲} = \frac{-۱۰۰۰\times ۱۰۰۰\times ۱۰^{-۶}}{(۱۰۰۰\times ۱۰۰۰\times ۱۰^{-۶}S+۱)^۲} \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{-۱}{(S+۱)^۲} \quad \Rightarrow \quad V_o(t) = te^{-t}u(t)$$

۹ـ گزینه «۳» ابتدا نمودارهای $(I-V)$ سه المان موازی را ترسیم می‌کنیم.

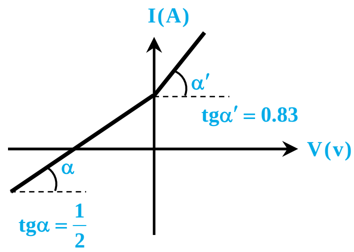


با توجه به موازی بودن المان‌های مذکور، ولتاژ آنها مساوی بوده و جریان‌های آنها با هم جمع می‌شود. حال داریم:

$$V=V_۱=V_۲=V_۳ \quad , \quad I=I_۱+I_۲+I_۳$$

$$V>۰ \Rightarrow \begin{cases} I_۱=۱A \\ I_۲=\frac{۱}{۲}V_۲ \\ I_۳=\frac{۱}{۳}V_۳ \end{cases} \Rightarrow I=۱+\frac{۱}{۲}V_۲+\frac{۱}{۳}V_۳ \Rightarrow I=۱+۰/۸۳V \quad , \quad V<۰ \Rightarrow \begin{cases} I_۱=۱A \\ I_۲=\frac{۱}{۲}V_۲ \\ I_۳=۰ \end{cases} \Rightarrow I=۱+\frac{۱}{۲}V \quad \text{(دیود قطع است)}$$

حال نمودار $(I-V)$ را ترسیم می‌کنیم.



راه‌حل تستی: برای پاسخ سریع‌تر، می‌توان شیب منحنی را در دو حالت روشن و خاموش بودن دیود، محاسبه کرد.

$$\text{if} \quad V>۰ \Rightarrow D(on) \Rightarrow tg\alpha'=\frac{I}{V}=\frac{۱}{R}=\frac{۱}{۳\|۲}=۰/۸۳\mho$$

$$\text{if} \quad V<۰ \Rightarrow D(off) \Rightarrow tg\alpha=\frac{I}{V}=\frac{۱}{R}=\frac{۱}{۲}=۰/۵\mho$$

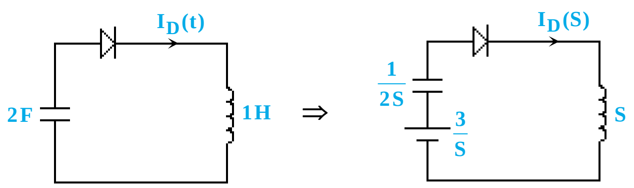
با توجه به شیب‌های بدست آمده فقط گزینه (۳) صحیح است.

۱۰ـ گزینه «۱» با توجه به صفر بودن شرایط اولیه در مدار، در زمان $t=۰^+$ سلف به صورت مدار باز عمل می‌کند و دیود حاوی جریان صفر بوده و قطع است. لذا تمام جریان $۶\delta(t)$ از خازن عبور می‌کند. حال داریم:

$$V_C=\frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+}۶\delta(t)dt=\frac{۶}{۲}=۳\,v$$

ولتاژ بدست آمده برای خازن در حکم ولتاژ اولیه است و برای حل معادله دیفرانسیل پس از هدایت دیود مورد استفاده قرار می‌گیرد. پس از صفر شدن تابع ضربه در $t>۰$، شارژ اولیه ناشی از تابع ضربه در خازن باعث ایجاد جریان و هدایت دیود می‌شود. لذا داریم:

$t>۰:$



$$I_D(S)=\frac{\frac{۳}{S}}{\frac{۱}{۲S}+S}=\frac{۳}{\frac{۱}{۲}+S^۲}=\frac{۳}{S^۲+(\sqrt{\frac{۱}{۲}})^۲}$$

$$\Rightarrow I_D(t)=\frac{۳}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}\sin\sqrt{\frac{۱}{۲}}\,t=۳\sqrt{۲}\sin\sqrt{\frac{۱}{۲}}\,t$$

توجه کنید که جریان فوق تا زمان صفر شدن آن در دیود برقرار است و در صورتی که بخواهد تغییر علامت دهد، دیود قطع خواهد شد. بنابراین:

$$I_D(t)=۳\sqrt{۲}\sin\sqrt{\frac{۱}{۲}}\,t=۰ \Rightarrow \sqrt{\frac{۱}{۲}}.t=\pi \Rightarrow t=\sqrt{۲}.\pi \Rightarrow \mathbf{I_D(t)}=\begin{cases} ۳\sqrt{۲}\sin\frac{t}{\sqrt{۲}} & ۰<t<\sqrt{۲}\pi \\ ۰ & \sqrt{۲}\pi<t \end{cases}$$

با قطع شدن دیود، ولتاژ خازن و جریان سلف در مقادیر فعلی خود ثابت مانده و مدار دیگر تغییر وضعیت نخواهد داد.

۱۱ـ گزینه «۲» برای حل این تست باید با تحلیل ساده مدارهای RC زمان روشن و خاموش شدن دیودهای D_1 و D_2 را محاسبه کنیم. ابتدا با توجه به این که ولتاژ اولیه خازن‌های C_1 و C_2 برابر صفر بوده ولی ولتاژ اولیه خازن C_2 مثبت است، مشخص است که دیودهای D_1 و D_2 قطع هستند چرا که ولتاژ دو سرشان کوچکتر از صفر است. در این حالت مدار شامل دو زیرمدار RC در سمت چپ و راست است که می‌توان آنها را به راحتی تحلیل کرد:

$$V_{C_1}(t)=V_{C_1}(\infty)(1-e^{-\frac{t}{R_1C_1}})=5(1-e^{-\frac{t}{3}})$$

$$V_{C_2}(t)=V_{C_2}(\infty)(1-e^{-\frac{t}{R_2C_2}})=5(1-e^{-\frac{t}{4}})$$

با توجه به ثابت زمانی کوتاهتر مدار RC سمت چپ، مشخص است که خازن C_1 سریعتر از خازن C_2 به ولتاژ ۲ ولت (ولتاژ خازن C_2) می‌رسد:

$$V_{C_1}(t)=5(1-e^{-\frac{t}{3}})=2\Rightarrow e^{-\frac{t}{3}}=0/6\Rightarrow -\frac{t}{3}=Ln(0/6)=-0/5\Rightarrow t=1/5\ s$$

بعد از این که ولتاژ خازن C_1 به ۲ ولت رسید، دیود D_1 روشن شده و خازن‌های C_1 و C_2 تواماً توسط منبع V_{S_1} با ثابت زمانی $\tau=1\times(3+5)=8$ شارژ می‌شوند. با توجه به این که این ثابت زمانی بزرگتر از ثابت زمانی مدار RC سمت راست است، باید این احتمال را داد که ولتاژ خازن C_2 قبل از قطع منابع تغذیه مدار به ولتاژ مجموعه دو خازن C_1 و C_2 برسد، که در این صورت دیود D_2 نیز وصل خواهد شد. بنابراین رابطه ولتاژ خازن‌های C_1 و C_2 را بدست آورده و برابر رابطه‌ای که قبلاً برای ولتاژ خازن C_2 بدست آوردیم، قرار می‌دهیم:

$$V_{C_2}(t)=V_{C_2}(\infty)+[V_{C_2}(t=1/5)-V_{C_2}(\infty)]e^{-\frac{t-1/5}{8}}=5-3e^{-\frac{t-1/5}{8}}\quad,\quad V_{C_2}(t)=5(1-e^{-\frac{t}{4}})$$

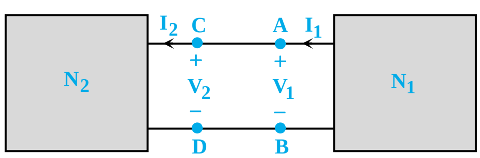
$$V_{C_2}(t)=V_{C_2}(t)\Rightarrow 5-3e^{-\frac{t-1/5}{8}}=5-5e^{-\frac{t}{4}}\Rightarrow 0/6e^{-\frac{t-1/5}{8}}=e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Ln(0/6)+Ln(e^{-\frac{t-1/5}{8}})=Ln(e^{-\frac{t}{4}})\Rightarrow -0/5-\frac{t-1/5}{8}=-\frac{t}{4}\xrightarrow{\times(-8)} 4+t-1/5=2t\Rightarrow t=2/5\ s$$

بنابراین در زمان $t=2/5$ ثانیه، هر دو دیود روشن بوده و هر سه خازن موجود در مدار تواماً توسط منابع V_{S_1} و V_{S_2} شارژ می‌شوند. زمانی که منبع V_{S_1} صفر می‌شود، خازن C_1 از طریق مقاومت ۱ اهمی شروع به دشارژ شدن کرده و ولتاژش افت می‌کند؛ در این حالت ولتاژ دو سر دیود D_1 منفی شده و این دیود خاموش می‌شود. دیود D_2 نیز تا صفر شدن منبع ولتاژ V_{S_2} روشن باقی خواهد ماند و بعد از آن صفر می‌شود.

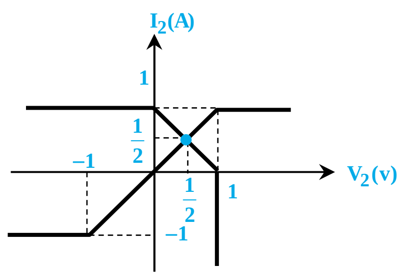
با توجه به توضیحات ارائه شده، دیود D_1 در بازه زمانی $1/5<t<5$ و دیود D_2 در بازه زمانی $2/5<t<6$ روشن بوده و لذا گزینه (۲) پاسخ این تست می‌باشد.

۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه A به C و B به D متصل می‌شود، شبکه زیر را خواهیم داشت:



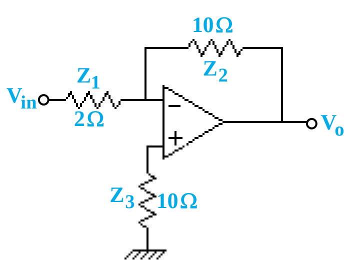
$$I_1=I_2\quad,\quad V_1=V_2$$

با ترسیم منحنی‌های (I_1-V_1) و (I_2-V_2) در یک صفحه و قطع دادن آنها خواهیم داشت:



$$\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{I_1=I_2=\frac{1}{2}A}\\ \mathbf{V_1=V_2=\frac{1}{2}v}\end{cases}$$

۱۳ـ گزینه «۳» در فرکانس $\omega=0$ خازن مدار باز بوده و مدار به صورت زیر است:

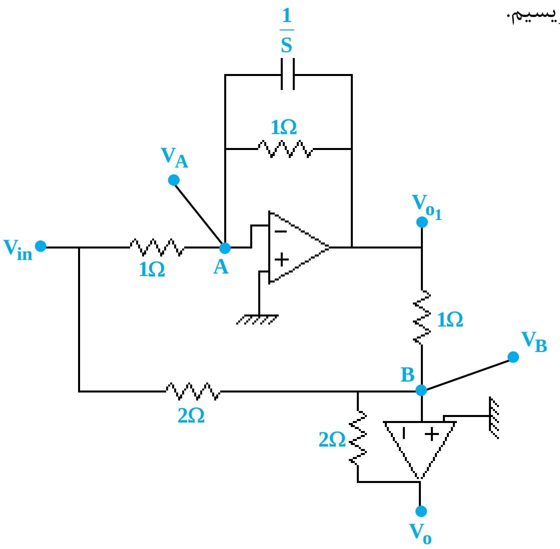


به علت عبور جریان صفر از Z_3 المان مذکور بی‌اثر است. حال داریم:

$$\left|\frac{V_o}{V_{in}}\right|=\left|\frac{-Z_2}{Z_1}\right|=\left|\frac{-10}{2}\right|=5$$

با دقت در گزینه‌ها فقط گزینه (۳) در $\omega=0$ دارای $\left|\frac{V_o}{V_{in}}\right|=5$ است.

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به برابر بودن ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی در نقاط A و B، KCL می‌نویسیم.



$$V_A = V_B = ۰$$

$$KCL(A): \frac{۰ - V_{in}}{۱} + \frac{۰ - V_{o_۱}}{۱} + \frac{۰ - V_{o_۱}}{\frac{۱}{S}} = ۰ \Rightarrow V_{in} + V_{o_۱}(۱+S) = ۰ \qquad (۱)$$

$$KCL(B): \frac{۰ - V_{o_۱}}{۱} + \frac{۰ - V_o}{۲} + \frac{۰ - V_{in}}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲V_{o_۱} + V_o + V_{in} = ۰ \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۲\left[\frac{-V_{in}}{۱+S}\right] + V_o + V_{in} = ۰ \Rightarrow V_{in}\left[۱ - \frac{۲}{S+۱}\right] + V_o = ۰ \Rightarrow V_{in}[۱-S] = V_o(S+۱) \Rightarrow -\frac{dV_{in}}{dt} + V_{in} = \frac{dV_o}{dt} + V_o$$

۱۵ـ گزینه «۳» دو راه‌حل کلی برای پاسخ به این سؤال وجود دارد:

روش اول: استفاده از تکنیک کانولوشن: برای یافتن خروجی یک سیستم در یک زمان مشخص می‌توان از تکنیک کانولوشن استفاده کرد. بطور کلی می‌دانیم خروجی حالت صفر یک سیستم با پاسخ ضربه $h(t)$ به ورودی دلخواه $r(t)$ بصورت زیر است:

$$y(t_۰) = \int_۰^{t_۰} h(t_۰ - t)r(t)\,dt = \int_۰^{t_۰} h(t)r(t_۰ - t)\,dt$$

در این تست راحت‌تر است که $r(t)$ را ثابت در نظر گرفته و $h(t)$ را بچرخانیم:

$$t_۰ = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow h(t_۰ - t) = (\frac{\pi}{۲} - t)e^{۲t-\pi}$$

حال می‌توان خروجی را با استفاده از انتگرال کانولوشن محاسبه نمود:

$$y(\frac{\pi}{۲}) = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} h(\frac{\pi}{۲} - t)r(t)\,dt = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{\pi}{۲} - t)e^{۲t-\pi}e^{-۲t}\cos t\,dt = e^{-\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{\pi}{۲} - t)\cos t\,dt$$

با در نظر گرفتن رابطه $\int t\cos t\,dt = t\sin t + \cos t$ می‌توان نوشت:

$$\int (\frac{\pi}{۲} - t)\cos t\,dt = \frac{\pi}{۲}\sin t - t\sin t - \cos t$$

$$y(\frac{\pi}{۲}) = e^{-\pi}\left(\frac{\pi}{۲}\sin t - t\sin t - \cos t\right)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = e^{-\pi}[(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} - ۰) - (۰ - ۰ - ۱)] = \mathbf{e^{-\pi}}$$

روش دوم: استفاده از تبدیل لاپلاس: در این روش برای یافتن تابع دقیق خروجی سیستم از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم که نسبت به روش اول زمان حل طولانی‌تری خواهد داشت. بنابراین بهتر است در حل چنین سؤالاتی از همان روش اول استفاده شود، مگر این که محاسبه انتگرال مورد نظر دشوار باشد.

می‌دانیم تبدیل لاپلاس خروجی سیستم، حاصلضرب تبدیل لاپلاس ورودی سیستم و پاسخ ضربه سیستم است:

$$Y(S) = H(S)R(S)$$

حال می‌توان نوشت:

$$R(S) = \frac{S+۲}{(S+۲)^۲ + ۱} = \frac{S+۲}{S^۲ + ۴S + ۵} \quad , \quad H(S) = \frac{۱}{(S+۲)^۲}$$

$$Y(S) = \frac{S+۲}{S^۲ + ۴S + ۵} \times \frac{۱}{(S+۲)^۲} = \frac{۱}{(S+۲)(S^۲ + ۴S + ۵)} = \frac{۱}{S+۲} - \frac{S+۲}{(S+۲)^۲ + ۱}$$

با محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس $Y(S)$، $y(t)$ به شکل روبرو بدست می‌آید:

$$y(t) = L^{-۱}\{Y(S)\} = e^{-۲t}u(t) - e^{-۲t}\cos t\,u(t)$$

و حال می‌توان $y(\frac{\pi}{۲})$ را محاسبه کرد:

$$y(\frac{\pi}{۲}) = e^{-\pi} - ۰ = \mathbf{e^{-\pi}}$$

۱۶ـ گزینه «۱» در بازه جریانی $-۱ < I_۱ < ۱$ سلف غیرخطی به صورت یک سلف خطی عمل می‌کند و مقدار اندوکتانس آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

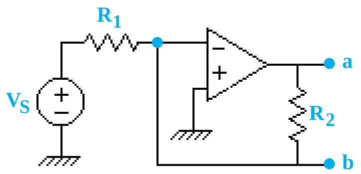
$$\phi = L.I \Rightarrow L = \frac{\phi}{I} \quad \text{و} \quad -۱ < I_۱ < ۱ \Rightarrow L = \frac{۲}{۱} = ۲H$$

در بازه زمانی $۰ < t < ۱$ معادله جریانی منبع $I_S(t)$ به صورت $I_S(t) = ۳t$ می‌باشد. حال جریان $۳t$ بین دو سلف $۱H$ و $۲H$ تقسیم می‌شود و لذا جریان سلف $۲H$ برابر با t می‌باشد. حال داریم:

$$V = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow V = ۲\frac{d(t)}{dt} \Rightarrow V = ۲v$$

با توجه به موارد بالا دیده می‌شود که در $۰ < t < ۱$ سلف غیرخطی حاوی جریان t، دارای ولتاژ ۲ ولت است. لذا فقط گزینه (۱) صحیح است.

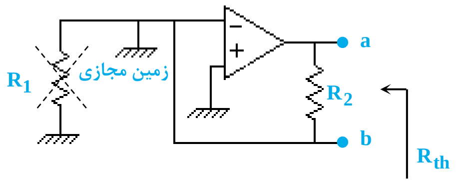
۱۷ـ گزینه «۲» دقت کنید که با توجه به حضور فیدبک در مدار، ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی برابر است و لذا ولتاژ پایه منفی برابر صفر خواهد بود. حال داریم: $V_b = ۰$



با توجه به شکل، این ساختار یک تقویت‌کننده وارون‌ساز است. لذا داریم:

$$V_{ab} = V_S(-\frac{R_۲}{R_۱}) \Rightarrow V_{th} = -V_S(\frac{R_۲}{R_۱})$$

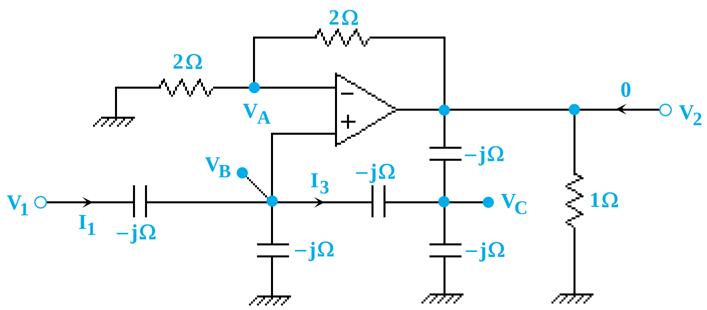
برای به دست آوردن امپدانس تونن منبع V_S را اتصال کوتاه می‌کنیم.



با توجه به صفر بودن ولتاژ دو سر $R_۱$، مقاومت $R_۱$ حذف می‌شود. لذا داریم:

$$\mathbf{R_{th} = R_۲}$$

۱۸ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف $Z_{۱۱} = \left.\frac{V_۱}{I_۱}\right|_{I_۲=۰}$، برای بدست آوردن رابطه $V_۱$ با $I_۱$ لازم است که در مسیر ولتاژ $V_۱$ به سمت درون مدار KVL زده شود. لذا باید ولتاژ پایه مثبت ورودی را بر حسب $V_۱$ محاسبه کنیم.



با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A - V_۲}{۲} + \frac{V_A}{۲} = ۰ \Rightarrow V_A = \frac{۱}{۲}V_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_B - V_۱}{-j} + \frac{V_B}{-j} + \frac{V_B - V_C}{-j} = ۰$$

$$V_A = V_B = \frac{۱}{۲}V_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}V_۲ - V_۱ + \frac{۱}{۲}V_۲ + \frac{۱}{۲}V_۲ - V_C = ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}V_۲ - V_۱ - V_C = ۰ \qquad (۲)$$

با نوشتن KCL در گره C داریم:

$$\frac{V_C}{-j} + \frac{V_C - V_۲}{-j} + \frac{V_C - V_B}{-j} = ۰$$

$$V_A = V_B = \frac{۱}{۲}V_۲ \Rightarrow ۳V_C - V_۲ - V_B = ۰ \Rightarrow ۳V_C - V_۲ - \frac{۱}{۲}V_۲ = ۰ \Rightarrow V_C = \frac{۱}{۲}V_۲$$

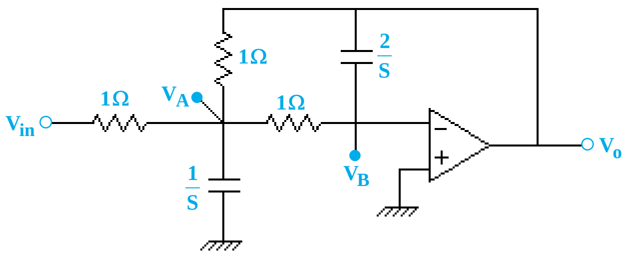
$$V_A = V_B = V_C = \frac{۱}{۲}V_۲ \Rightarrow I_۳ = \frac{V_B - V_C}{-j} = ۰$$

با نوشتن KVL در حلقه ورودی داریم:

$$V_۱ = -jI_۱ + (I_۱ - I_۳)(-j)$$

$$I_۳ = ۰ \Rightarrow V_۱ = -۲jI_۱ \Rightarrow \mathbf{Z_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱} = -j۲\Omega}$$

۱۹ـ گزینه «۳» برای محاسبه پاسخ ضربه، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و در نقاط A و B، KCL می‌زنیم. لازم به ذکر است که به علت وجود فیدبک منفی ولتاژ پایه‌های ورودی آپامپ و V_B برابر صفر است.



با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A - V_{in}}{1} + \frac{V_A - V_B}{1} + SV_A + \frac{V_A - V_o}{1} = 0$$

$$V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A[3+S] - V_{in} = V_o \qquad (1)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_B - V_o}{\frac{2}{S}} + \frac{V_B - V_A}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{2}V_B - \frac{S}{2}V_o + V_B - V_A = 0$$

$$V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = -\frac{S}{2}V_o \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-\frac{S}{2}V_o[3+S] - V_{in} = V_o \quad \Rightarrow \quad V_o = V_{in}\left[\frac{-2}{S^2+3S+2}\right] \qquad \text{و} \qquad V_{in}(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad L(V_{in}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad V_o = \frac{-2}{S^2+3S+2} \times 1 = \frac{-2}{S+1} + \frac{2}{S+2} \Rightarrow \mathbf{V_o(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}}$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که جریان پایه‌های ورودی آپامپ صفر است، $I_1 = 0$ بوده و لذا ماتریس‌های Z و H وجود ندارند، چون به عنوان مثال $\frac{V_1}{I_1}$ برای آن‌ها تعریف نشده است. از طرفی چون ولتاژ پایانه‌های ورودی آپامپ یکسان است، لذا $V_1 = 0$ خواهد بود و ماتریس Y هم وجود ندارد. بنابراین تنها ماتریس T وجود خواهد داشت:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 0 = 0V_2 - 0I_2 \\ I_1 = 0 = 0V_2 - 0I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$